Un modèle général et des résultats de complexité pour le partage de biens indivisibles

Sylvain Bouveret* sylvain.bouveret@cert.fr
Hélène Fargier† fargier@irit.fr
Jérôme Lang† lang@irit.fr
Michel Lemaître* michel.lemaitre@cert.fr

* Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales, Centre de Toulouse
2, avenue E. Belin, B.P. 4025, F-31055 Toulouse cedex 4

† Institut de Recherches en Informatique de Toulouse,
118, route de Narbonne, F-31062 Toulouse cedex

Résumé :
De nombreuses activités industrielles ou de recherche ont un coût tel qu'il est souvent avantageux pour les agents concernés de cofinancer la construction ou l'acquisition d'une ressource commmune nécessaire à l'activité. Cette ressource devra ensuite être exploitée en commun, donc partagée. Les règles de partage devront prendre en compte des préférences antagonistes : chaque agent veut maximiser sa propre satisfaction, tandis que collectivement, on recherche des décisions équitables et exploitant au mieux la ressource. Nous proposons dans cet article un modèle formel du problème de partage de biens indivisibles, sans possibilité de compensations monétaires, et avec des contraintes d'admissibilité quelconques. Ce modèle est appliqué à un cas concret, celui du partage de ressources satellitaires.

Mots-clés : Partage équitable, enchères combinatoires, agrégation de préférences, logique, complexité.

Abstract:
Many industrial or research activities are so expensive that it is often benefitable for the involved agents to cofund the construction or the purchase of a common required resource. This resource will then be exploited in common, therefore in a shared way. The rules for resource sharing should take account of the possibly antagonistic preferences : each agent wants to maximize its own satisfaction, whereas, from the collective point of view, efficient decisions – i.e., decisions which both are equitable and exploit the resources in an optimal way – are looked for. We give in this article a formal model for indivisible goods resource sharing without monetary compensations and with arbitrary admissibility constraints, and we also give some complexity results about this model. The model is applied to a real-world case, namely satellite resource sharing.

Keywords: fair allocation, resource sharing, preference aggregation, logic, computational complexity.

1 Introduction

Le problème d'attribution de biens indivisibles à des agents est étudié dans deux communautés différentes. La recherche menée dans le domaine du choix social se concentre sur les propriétés satisfaites par de possibles procédures d'allocations, en particulier des propriétés ayant trait à la notion de **justice**, telles que l'équité ou l'absence d'envie, mais se préoccupe rarement de considérations algorithmiques ou de complexité. De son côté, la recherche en intelligence artificielle s'intéresse depuis quelques années aux enchères combinatoires, du point de vue de la représentation (recherchant notamment des moyens pour permettre aux agents d'exprimer leurs préférences d'une manière concise et intuitive), et du calcul (développant des algorithmes et recherchant des sous-classes de problèmes de complexité raisonnable).

Cette dualité met en valeur l'existence d'un fossé. Les enchères combinatoires qui, de leur côté, cherchent à maximiser la somme des prix payés par les agents, constituent une forme spécifique de procédure de partage, littéralement une forme purement utilitariste avec transferts monétaires dans laquelle des considérations telles que la justice ou l'équité n'ont pas leur place. Les économistes, quant à eux, ont considéré d'autres formes de mécanismes de partage (avec ou sans transferts monétaires), laissant de côté l'étude de la représentation compacte et de la complexité. Ces considérations sont le point de départ de cet article, dans lequel nous nous intéressons à un cadre assez général pour la description du problème de partage de biens indivisibles, dans lequel les critères d'optimisation varient de l'utilitarisme à l'égalitarisme, et qui englobe de nombreuses classes de contraintes et d'allocations admissibles. Nous nous concentrerons ensuite sur la représentation compacte (en section 2) et la complexité (en section 3. Une application réelle est introduite en section 4, qui décrit un problème de partage d'une ressource satellitaire. Enfin, la section 5 traite des travaux connexes et des sujets voisins. Partant du principe que les principaux résultats concernant le cas spécifique des enchères combinatoires sont bien connus, nous nous concentrerons donc sur le partage équitable sans possibilité de transfert monétaire.

2 Un modèle général et un langage de représentation

Dans cette section est introduit un modèle général de représentation du problème de partage d'un ensemble de bien indivisibles entre plusieurs agents. Dans notre modèle, les agents sont représentés par un ensemble $N = \{1, \dots, n\}$, et l'ensemble fini des **objets indivisibles** (aussi appelés biens) est noté $\mathcal{O}$. Un objet peut être attribué à un ou plusieurs agents de N, ou ne pas être attribué du tout. Un **lot** est un sous-ensemble de $\mathcal{O}$.

Definition 1 (partage) *Un* **partage** *est un n-uple* $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$*, dans lequel* $x_i \subseteq \mathcal{O}$ *pour tout* $i \in N$. x_i *est la* **part** *de l'agent* i *dans* $\mathbf{x}$.

Maintenant que les notions d'agent et d'objet ont été introduites, précisons comment ces agents peuvent exprimer leurs préférences sur les objets ou les lots qu'ils désirent. Bien évidemment, puisque l'ensemble des lots que peut recevoir un agent est de taille exponentielle, il apparaît complètement irréaliste de spécifier la fonction d'utilité d'un agent de manière explicite (*i.e* en énumérant tous les sous-ensembles possibles de $\mathcal{O}$ et en spécifiant pour chacun sa valeur d'utilité). Nous pouvons contourner ce problème en introduisant un **langage de représentation compacte de préférences** (voir [12, 4] pour une discussion plus générale sur le sujet).

De nombreuses applications (comme par exemple les enchères combinatoires) nécessitent la possibilité pour les agents d'exprimer des demandes complexes, comme par exemple des relations de dépendances entre les objets. Ces demandes complexes peuvent être exprimées de manière compacte à l'aide de la logique. Ainsi, nous notons $L_{\mathcal{O}}$ le langage propositionnel construit à l'aide de l'ensemble des symboles $\mathcal{O}$ (où chaque objet est vu comme un symbole propositionnel) et des connecteurs usuels $\neg$, $\wedge$, $\vee$. $L^+_{\mathcal{O}}$ est le sous-langage de $L_{\mathcal{O}}$ constitué des formules non négatives. Chaque lot $x \subseteq \mathcal{O}$ peut être considéré comme une interprétation propositionnelle de $L_{\mathcal{O}}$ – où les variables propositionnelles correspondant aux ressources dans x (resp. non contenues dans x) se voient attribuer la valeur de vérité vrai (resp. faux). Cela nous permet de définir la satisfaction d'une formule de $L_{\mathcal{O}}$ par un lot x, notée $x \vDash \varphi$. Par exemple, soient $L_{\mathcal{O}} = \{o_1, \dots, o_{10}\}$ et $x_1 = \{o_1, o_2\}$; nous avons $x_1 \vDash o_1$, $x_1 \nvDash o_3$, $x_1 \vDash o_1 \vee o_3$, $x_1 \nvDash o_1 \wedge o_3$.

De plus, à chaque demande est associé un entier positif qui représente l'importance de la demande indépendamment de toutes les autres. Si la demande est satisfaite, ce poids contribuera à la mesure globale de satisfaction de l'agent, d'une manière qui sera définie plus loin. Formellement :

Definition 2 (demandes pondérées) *Une demande est une formule de* $L^+_{\mathcal{O}}$ *. L'ensemble des* **demandes pondérées de l'agent** i *est l'ensemble des couples* $\Delta_i = \{\langle \varphi^i_1, w^i_1 \rangle, \dots, \langle \varphi^i_{|\Delta_i|}, w^i_{|\Delta_i|} \rangle\}$*, où* $\varphi^i_k \in L_{\mathcal{O}}$ *et* $w^i_k \in \mathbb{N}$.

Le fait que les demandes soient dans $L^+_{\mathcal{O}}$ plutôt que dans $L_{\mathcal{O}}$ est dû à l'hypothèse implicite que les fonctions d'utilité sont non-décroissantes (voir plus loin). Si nous ne voulons pas de cette hypothèse, nous pouvons alors la relâcher en autorisant n'importe quelle formule de $L_{\mathcal{O}}$ (cela n'a quasiment pas d'impact sur le reste du papier). Le cas le plus simple advient quand les demandes sont des formules atomiques (exprimant ainsi l'indépendance préférentielle entre objets).

Définissons maintenant le langage $L^{alloc}_{\mathcal{O}}$ comme le langage propositionnel engendré par l'ensemble de symboles propositionnels $\{alloc(o, i) \mid o \in \mathcal{O}, i \in N\}$. Il y a une bijection entre l'ensemble des partages et celui des interprétations de $L^{alloc}_{\mathcal{O}}$: un partage $\mathbf{x}$ correspond à l'interprétation pour laquelle $alloc(o, i)$ est vrai quand $o \in x_i$, et faux sinon. Les contraintes s'expriment facilement dans $L^{alloc}_{\mathcal{O}}$:

Definition 3 *Une* **contrainte** *est une formule de* $L^{alloc}_{\mathcal{O}}$. *Un partage est dit* **admissible** *relativement à l'ensemble des contraintes* $\mathcal{C}$ *si et seulement si il satisfait toutes les contraintes de* $\mathcal{C}$. $Adm(\mathcal{C})$ *est l'ensemle des partages admissibles relativement à* $\mathcal{C}$.

Les contraintes séparent les partages admissibles des partages inadmissibles, où l'inadmissibilité signifie par exemple une impossibilité physique ou encore légale.

Remarquons que nous n'excluons pas la possibilité pour une ressource donnée d'être allouée à plusieurs agents (ainsi $x_i \cap x_j$ peut très bien être non vide). Une **contrainte de préemption** relative à o exprime le fait que cet objet ne peut pas être attribué à plus d'un seul agent, ce qui s'écrit :

$$\neg(alloc(o,i) \wedge alloc(o,j)) \mid i,j \in N, i \neq j$$

D'autres contraintes (que les contraintes de préemption) classiques sont **les contraintes de capacité** qui expriment par exemple le fait que deux objets donnés ne peuvent être attribués simultanément (**contraintes d'exclusion**), ou plus généralement qu'il y a un nombre (ou volume) maximal de ressources à allouer, ou **des dépendances entre ressources**, qui expriment par exemple le fait que si o_1 est attribué à un agent, alors soit o_2 soit o_3 doit être attribué à ce même agent.

Une conséquence directe de la définition d'admissibilité est qu'il est toujours possible de déterminer en un temps polynomial si un partage donné est admissible ou non.

Les définitions suivantes présentent de quelle manière les fonctions d'utilité pour les agents peuvent être exprimées de manière compacte, en utilisant leurs demandes pondérées.

Definition 4 (utilité individuelle) *Étant donnés un agent i, son ensemble de demandes pondérées Δ_i, et un partage $\mathbf{x}$, l'utilité individuelle $u_i(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ pour l'agent i est définie en agrégeant les poids des demandes satisfaites par x_i :*

$$u_i(\mathbf{x}) = f(\{w^i | \langle \varphi, w\rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \models \varphi\})$$

où f est une fonction non-décroissante, commutative et associative sur $\mathbb{N}$.

Commentons cette définition. Premièrement, elle implique que la satisfaction d'un agent ne dépend que de ce qu'il reçoit. Nous pouvons donc écrire $u_i(\mathbf{x}) = u_i(x_i)$ (x_i étant ce que l'agent i reçoit), et nous pouvons définir sans restriction u_i comme étant une application de $2^{\mathcal{O}}$ dans $\mathbb{N}$. La non-décroissance signifie que le fait de satisfaire une demande ne peut jamais avoir un impact négatif (sur la satisfaction d'un agent), la commutativité implique que l'ordre dans lequel sont faites des demandes n'est pas significatif, et l'associativité permet de calculer l'utilité individuelle de manière simple en la considérant comme une loi interne binaire, et ce même quand l'ensemble des demandes est énorme. Enfin, le fait que les demandes soient des formules positives seulement (dans lesquels la négation n'est jamais présente) implique que les utilités sont non-décroissantes vis-à-vis de l'inclusion d'ensemble, littéralement :

> pour tout agent i et n'importe quelle paire d'ensembles d'objets x, y, telle que $x \subseteq y$, alors on a $u_i(x) \subseteq u_i(y)$.

Notons aussi que, par définition, $u_i(\emptyset) = 0$. De plus, il peut être aisément démontré que toutes les utilités non-décroissantes valuées positivement peuvent être représentées par des demandes pondérées.

Exemple 1 *Considérons un problème d'achat de biens collectifs. Il s'agit d'acheter un certain ensemble de biens comestibles pour élaborer un repas ; soit $\mathcal{O} = \{pat, ab, pe\}$ (pat pour « pâte à tarte », ab pour « abricots », pe pour « pêches ») et soit la demande de l'agent 1 (on ignore ici les demandes des autres agents) : $\Delta_1 = \{\langle pat \wedge (ab \vee pe), 2\rangle, \langle ab \vee pe, 2\rangle, \langle pat \wedge ab, 1\rangle\}$ et considérons que l'utilité individuelle de l'agent est calculée en sommant les poids des demandes satisfaites. La fonction d'utilité u_1 induite par Δ_1 est alors la suivante :*

x_1	u_1	x_1	u_1
$\{pat, ab, pe\}$	*5*	$\{pat, ab\}$	*5*
$\{pat, pe\}$	*4*	$\{pat\}$	*0*
$\{pe, ab\}$	*2*	$\{pe\}$	*2*
$\{ab\}$	*2*	$\emptyset$	*0*

On remarque que l'agent a exprimé un renforcement entre la pâte à tarte et les fruits (abricots ou pêches) puisque les utilités de $\{pat, ab\}$ et de $\{pat, pe\}$ sont supérieures à l'utilité de la pâte à tarte seule (qui est nulle) additionnée de l'utilité des pêches ou des abricots seuls ; en outre, l'agent a exprimé que les abricots et les pêches sont interchangeables, et qu'il est de surcroît indifférent entre les abricots et les pêches s'il n'y a pas de pâte à tarte, et qu'il a une légère préférence pour les abricots s'il y en a.

Le choix le plus évident pour la fonction d'agrégation f qui apparaît dans la définition 4 est $f = +$, cependant, il peut y avoir des raisons, dans certains cas, de choisir $f = max$. Premièrement, $f = max$ est appropriée dans les cas où les agents ne veulent pas plus d'un objet[1]. Deuxièment, dans certains cas, les agents ne veulent pas (ou ne peuvent pas) exprimer leurs préférences numériquement, et en conséquence sont plus enclins à exprimer des listes de priorité. Il est vrai toutefois que dans ce cas, une meilleure option serait d'utiliser $f = leximax$ (voir définition plus loin dans cette section, et dans la section 4), plutôt que $f = max$.

La qualité d'un partage admissible dépend désormais de manière évidente du niveau de satisfaction de tous les agents. Nous agrégeons donc le **profil de satisfaction** – qui est le vecteur de la satisfaction des agents – en une **fonction d'utilité collective** (ou sociale).

Definition 5 *L'***utilité collective** $uc(\mathbf{x})$ *d'un partage* $\mathbf{x}$ *est calculée en agrégeant les utilités individuelles :*

$$uc(\mathbf{x}) = g(u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_n(\mathbf{x}))$$

où g est une fonction commutative et non-décroissante de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$.

La commutativité implique que les agents sont considérés comme étant égaux vis-à-vis du partage (cette hypothèse peut être discutée et relâchée si nécessaire). La non-décroissance s'impose de manière évidente.

Le panorama des fonctions d'agrégation pertinentes pour g est beaucoup plus étendu que pour f. Deux choix « standard » sont les choix de $g = +$ et de $g = \min$. $g = \min$ est un choix d'équité (ou d'égalitarisme), dans le sens où les meilleurs partages sont ceux pour lesquels l'agent le moins satisfait est le plus heureux possible, alors que le cas de $g = +$ privilégie l'efficacité (ou l'utilitarisme). Le choix de $g = +$ est particulièrement approprié dans les cas où les transferts d'argent (tels que les compensations monétaires entre agents) sont autorisés, mais ne l'est pas nécessairement autant quand de tels transferts sont exclus.

[1]De telles fonctions d'utilité pourraient, bien sûr, être exprimées en utilisant $f = +$, mais leur expression serait bien moins compacte. De plus, certains problèmes ont une complexité moindre avec $f = max$ qu'avec $f = +$, voir section 3.

Nous pouvons remarquer que la somme et le minimum sont des possibilités quelque peu extrêmes des fonctions d'agrégation. On pourrait vouloir assurer un certain niveau d'équité sans pour autant imposer $g = \min$, fonction d'agrégation qui se concentre uniquement sur l'agent le moins satisfait. Ainsi, nous introduisons la famille des **moyennes ordonnées pondérées** (OWA pour *Ordered Weighted Averages*), ainsi que l'agrégateur leximin.

Definition 6 (opérateurs OWA [23]) *Soit $\vec{w} = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ un vecteur de $\mathbb{N}^n$* [2]. *L'opérateur de moyenne pondérée ordonnée $OWA_{\vec{w}}$ associé à $\vec{w}$ est défini comme suit : pour tout tuple $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ de valeurs d'utilité, on définit σ comme étant une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}$; alors, on a*

$$OWA_{\vec{w}}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{\sigma(i)}.$$

Notons que les opérateurs OWA englobent de nombreux cas particuliers, comme par exemple le min (pour $\vec{w} = \langle 1, 0, \ldots, 0 \rangle$), et la somme (pour $\vec{w} = \langle 1, \ldots, 1 \rangle$), avec un continuum d'opérateurs entre les deux. Ainsi, ils permettent l'expression de n'importe quel compromis entre utilitarisme pur et égalitarisme. En particulier, la famille OWA peut exprimer l'ordre leximin[3]. Soit Q un entier suffisamment grand[4], alors l'OWA induit par le vecteur $\vec{w} = \langle Q^{n-1}, Q^{n-2}, \ldots, 1 \rangle$ classe les vecteurs d'utilité dans le même ordre que l'ordre leximin (les détails techniques sont omis, puisqu'ils seraient redondants avec la dernière définition)[5].

Definition 7 *Une instance du* **problème de partage** *consiste en :*
– *un ensemble fini d'***agents** $N = \{1, \ldots, n\}$,
– *un ensemble fini d'***objets** $\mathcal{O}$,

[2]La définition originale requiert que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, mais cette hypothèse n'a pas d'incidence ici.

[3]Ceci est vrai uniquement car pour un problème donné, il y a uniquement un nombre fini de valeurs d'utilité. Dans le cas où les différences entre les utilités peuvent tendre vers 0, l'expression de l'ordre leximin à l'aide des OWA ne serait pas possible.

[4]Formellement, $Q > \frac{M}{m}$, où M (resp. m) est la plus grande (resp. la plus petite non nulle) différence d'utilité entre deux ensembles d'objets pour chaque paire d'agents.

[5]De même, $\vec{w} = \langle 1, Q, Q^2, \ldots, Q^{n-1} \rangle$ induit l'ordre leximax, pertinent pour le choix de f.

– *un ensemble fini de* **contraintes** $\mathcal{C}$ *,*
– *un couple* (f, g) *de fonctions d'agrégation, la première pour les utilités individuelles (voir définition 4), et la seconde pour l'utilité collective (voir définition 5).*

Le résultat d'un problème de partage est un partage admissible qui maximise l'utilité collective.

3 Complexité

On suppose que les classes de complexité P et NP sont connues du lecteur (on pourra se référer par exemple à [10]). Dans cette section, on s'intéresse à la complexité du problème de décision associé au problème de partage :

> [PBI] Partage de biens indivisibles : *Étant donnée une instance du problème de partage (section 2) et un entier K, existe-t-il un partage admissible $\mathbf{x}$ tel que $uc(\mathbf{x}) \geq K$?*

Pour commencer, il est possible de vérifier en temps polynomial si un partage est admissible, et qui plus est, l'utilité collective d'un partage peut aussi être calculée en temps polynomial. En conséquence, PBI est dans NP, quels que soient les contraintes d'admissibilité ou les demandes. Nous allons maintenant tenter de déterminer les cas où le problème de décision est NP-complet (dans NPC), ou polynomial (dans P), selon les hypothèses restrictives que l'on fait sur les contraintes ou les demandes, et selon les choix des agrégateurs f et g. Comme nous l'avons justifié dans la section 2, nous considèrerons uniquement les cas $f = +$ ou $f = \max$, et $g = +$, $g = \min$ ou $g = \text{leximin}$.

Pas de contraintes : P. Quand il n'y a pas de contraintes (*i.e* lorsque tous les partages sont admissibles), nous pouvons donner à chaque agent tous les objets qu'il demande. Soit $\mathbf{x}^\star$ ce partage. $\mathbf{x}^\star$ est optimal, puisque toutes les fonctions d'utilité des agents et la fonction d'utilité collective sont non-décroissantes. Nous avons juste à vérifier que $\mathbf{uc}(\mathbf{x}^\star) \geq K$. En conséquence dans ce cas PBI est dans P.

Contraintes quelconques : NPC. Nous nous tournons maintenant vers le cas général dans lequel n'importe quel type de contrainte est autorisé. Une réduction immédiate du problème SAT prouve que PBI est NPC : à chaque formule propositionnelle ψ sur les symboles $\{o_1, \ldots, o_p\}$, on associe le problème de partage défini par $N = 1$, $\mathcal{C} = \psi$ et $\Delta_1 = \{\langle o_{p+1}, 1\rangle\}$. ψ est satisfiable si et seulement si il exite $\mathbf{x}$ tel que $uc(\mathbf{x}) \geq 1$.

Contraintes de préemption seulement et demandes atomiques seulement. Le cas $f = +$, $g = +$ est en fait un problème d'enchères standard, et ce qui suit est immédiat : en attribuant chaque objet à l'agent qui le désire le plus, on obtient un partage optimal. En conséquence, le problème est dans P.

Lorsque $f = \max$ et $g = +$, il nous suffit de considérer les partages qui attribuent au plus un objet à chaque agent. Dans ce cas PBI revient à chercher un couplage de poids K dans le graphe bipartite $G = (\mathcal{O} \bigcup N, E)$, où $E = \{(o, i) \mid i \in N \text{ et } o \in F_i\}$, F_i étant l'ensemble apparaissant dans Δ_i, et l'arête (o, i) ayant le même poids que o dans Δ_i. Le problème de couplage maximal est dans P, donc PBI l'est aussi dans ce cas. Le cas $f = \max$ et $g = \min$ est aussi équivalent au même problème de couplage, à ceci près que l'arête (o, i) a un poids de 1 si le poids de o dans Δ_i est supérieur ou égal à K, et de 0 sinon, et nous recherchons un couplage maximal d'un poids d'au moins n. Ainsi, PBI est aussi dans P.

Lorsque $f = +$ et $g = min$, on peut démontrer que le problème est NPC par une simple réduction depuis PARTITION, en utilisant deux agents avec les mêmes demandes pondérées (ainsi, le problème reste NPC même si les agents on le même profil de préférence). Cependant, ce problème est dans P si tous les poids sont égaux à 1 : il peut en effet être exprimé comme un problème de flot maximal dans un réseau. La même réduction depuis PARTITION montre de même que PIB est NPC quand $f = +$ et $g = \text{leximin}$.

Contraintes de préemption seulement et n'importe quel type de demande. Lorsque $g = +$, la réduction suivante de INDEPENDENT SET montre que PBI est NPC, que f soit $+$ ou max. À un graphe $G = (N, E)$, on associe un problème de partage avec l'ensemble des agents N. Pour chaque arête (i, j) dans E, on construit un nouvel objet. L'unique demande de chaque agent est la conjonction des tous les objets « incidents » à cet agent, et cette demande a un poids de 1. Il y a un ensemble indépendant dans G de taille K si et seulement si il y a un partage $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{uc}(\mathbf{x}) = K$. Notons que ce résultat n'a rien d'original pour $f = +$, $g = +$, puisque c'est un corollaire de la NP-difficulté de la détermination d'un gagnant dans le domaine des enchères combinatoires ([18]), et donc PBI est déjà connu pour être NPC dans ce cas.

Tournons-nous maintenant vers le cas $g = \min$ et $f = \max$. La réduction suivante de SET PACKING montre que PBI est NPC dans ce cas. Nous nous donnons une collection C d'ensemble finis, un entier positif $K \leq C$, et nous nous demandons si C contient au moins K ensembles disjoints. On construit le problème de partage suivant : l'ensemble d'objets est formé de l'union des ensembles de C. Il y a K agents. Chaque agent demande $|C|$ conjonctions, chacune correspondant à un ensemble différent de C, toutes les demandes ayant un poids de 1. La réponse à la question précédente est affirmative si et seulement si il existe un partage $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{uc}(\mathbf{x}) = 1$. Cette réduction fonctionne aussi pour le cas $g = \min$ et $f = +$.

Les preuves précédentes peuvent être étendues au cas $g = leximin$.

Contraintes de volume uniquement. Pour ce paragraphe seulement, nous relâchons l'hypothèse que les contraintes sur les partages admissibles sont exprimées en logique propositionnelle pure. Une contrainte de volume est une contrainte linéaire sur un ensemble S d'objets qui s'écrit $\sum_{o \in S} v(o) \leq v_{\max}$, où $v(o)$ est le volume de l'objet o et $v_{\max}$ est le volume maximal autorisé.

Un cas évident est celui de $f = +$ et un seul agent : c'est exactement le problème NPC KNAPSACK (SAC-À-DOS). À partir de cette remarque, il n'est pas difficile de voir que PBI est NPC dès que f ou g est $+$ (si $g = +$, on prend $|\mathcal{O}|$ agents demandant un objet chacun).

On prouve la NP-complétude du cas $f = max, g = min$ par réduction de HITTING SET : nous nous donnons une collection C de sous-ensembles $S_1, \ldots, S_n$ d'un ensemble fini S, un entier positif $K \leq |S|$, et nous nous demandons s'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ avec $|S'| \leq K$ tel que S' contient au moins un élément de chaque sous-ensemble dans C. Depuis ce problème, on construit le problème PBI suivant : $\mathcal{O} = S$, il y a n agents, et l'agent i a des demandes atomiques de poids 1 sur chaque objet contenu dans S_i, $v(o) = 1$ quel que soit o, et il y a une contrainte de volume $\sum_{o \in \mathcal{O}} v(o) \leq K$. La réponse à la question précédente est oui si et seulement si il existe une allocation $\mathbf{x}$ telle que $\mathbf{uc}(\mathbf{x}) \geq 1$. Ce résultat peut s'étendre aisément au cas $g = \text{leximin}$.

Contraintes d'exclusion seulement. Une contrainte d'exclusion sur l'ensemble d'objets $\{o_1, \ldots, o_p\}$ interdit l'attribution conjointe de ces objets : au moins l'un d'entre eux doit ne pas être attribué.

On prouve la NP-complétude du cas $g = \min$, $f = \max$ par réduction depuis SAT. Soit $\psi = d_1 \wedge \ldots d_N$ une formule propositionnelle. On construit le problème de partage à un agent i par clause d_i, et 2 objets o_s et o'_s pour chaque symbole s apparaissant dans ψ. On ajoute une contrainte d'exclusion $\neg(o_s \wedge o'_s)$ pour chaque symbole s de ψ. Pour chaque littéral l_k de d_i, l'agent i demande l'objet correspondant $(o_s, 1)$ si le littéral est positif, ou $(o'_s, 1)$ si le littéral est négatif. ψ est satisfiable si et seulement si il existe un partage $\mathbf{x}$ tel que $uc(\mathbf{x}) \geq 1$.

Une réduction similaire fonctionne pour $g = +$, $f = \max$, à partir de MAXSAT.

Nous analysons maintenant le cas $f = +$, en démontrant son appartenance à NPC. Ce résultat est obtenu pour un seul agent, donc g n'est pas concernée. Considérons donc un seul agent, qui demande l'ensemble des p objets en tant que demandes atomiques de poids 1, et m contraintes d'exclusion portant sur les ensembles d'objets $S_1, \ldots S_m$. Pour qu'un partage soit admissible, au moins un objet de chaque S_i doit être non attribué. L'ensemble des objets non attribués doit donc contenir au moins un élément de chaque S_i et être aussi petit que possible. Il s'agit exactement du problème (NPC) HITTING SET décrit ci-avant. Le problème reste NPC même si $|S_k| \leq 2$ pour chaque k. Encore une fois, nous obtenons aisément le même résultat pour $g = \text{leximin}$.

Résumé des résultats de complexité. Les résultats marqués (E) sont déjà connus dans le domaine des enchères (combinatoires), et ceux marqués (*) sont immédiats[6].

[6]Notons que lorsque PBI est NPC pour $g = +$, $g = \min$ ou $g = \text{leximin}$, c'est *a fortiori* le cas aussi pour le cas plus général de $g = OWA$.

- pas de contraintes : P (*)
- contraintes quelconques : NPC (*)
- contraintes de préemption seulement
  - demandes atomiques seulement
    - $f = +$
      - $g = +$: P (E)
      - $g = \min$: NPC, mais P si les poids sont égaux
      - $g = \text{leximin}$: NPC
    - $f = max$
      - $g = +|\min$: P
      - $g = \text{leximin}$: ?
  - n'importe quel type de demande
    - $f = +$
      - $g = +$: NPC (E)
      - $g = \min|\text{leximin}$: NPC
    - $f = max$
      - $g = +$: NPC
      - $g = \min|\text{leximin}$: NPC
- contraintes de volume seulement
  - $f = +$ ou $g = +$: NPC (*)
  - $f = max$
    - $g = \min|\text{leximin}$: NPC (*)
- contraintes d'exclusion seulement :
  - $f = +$, n'importe quel g : NPC (*)
  - $f = max$
    - $g = +|\min|\text{leximin}$: NPC

Il faut noter que le cas $(f = \max, g = \text{leximin})$ reste un problème ouvert.

4 Application

Cette section est consacrée à la description d'une application issue du monde réel, c'est-à-dire l'exploitation de Satellites d'Observation de la Terre (EOS pour Earth Observation Satellites). Cette application appartient au problème de partage d'un ensemble de biens indivisibles à des agents, sans compensation monétaire possible entre eux. Comme nous allons le voir, il s'agit d'un cas typique de problème de partage, différent d'une situation d'enchères, parce que l'équité y est un point capital.

Description. En raison de leur coût, les projets spaciaux tels que les EOS sont souvent co-financés et ensuite co-exploités par plusieurs agents (pays, entreprises, agences civiles ou militaires ...). La mission de l'EOS est d'acquérir des images (photographies) de zones spécifiées sur la surface terrestre, en réponse à des demandes d'observation venant des utilisateurs. Un tel satellite est commandé par un centre de planification. Chaque jour, le centre collecte un ensemble de demandes d'observation des agents. En général, une demande peut être satisfaite par une seule image, mais des demandes plus complexes peuvent être effectuées, comme nous allons le voir. À chaque demande est attribué un poids (entier positif), qui reflète l'importance que l'agent concerné donne à la satisfaction de cette demande. La tâche quotidienne du centre est, entre autres, de construire le plan de travail du satellite pour le jour suivant, en sélectionnant les images à acquérir parmi l'ensemble des demandes des agents.

Évidemment, l'exploitation du satellite doit obéir à un ensemble de contraintes physiques, comme par exemple les contraintes de fenêtre de visibilité, la gestion de la mémoire et de l'énergie .... À cause de ces contraintes d'exploitation, et du nombre important de demandes concernant certaines zones, en général toutes les demandes qui pourraient être satisfaites individuellement un jour donné ne le peuvent si on les considère dans leur totalité, parce qu'elles sont souvent en conflit. Toutes ces contraintes physiques définissent l'ensemble des partages admissibles des images entre les agents.

L'exploitation d'un EOS doit être :
- efficace : le satellite ne doit pas être sous-exploité,
- équitable : chaque agent s'attend à recevoir un retour sur investissements proportionnel à sa contribution financière.

Modélisation. Considérons tout d'abord le problème simple pour lequel seul un agent exploite la ressource. Dans ce cas, l'allocation admissible consiste à sélectionner, chaque jour, une séquence admissible d'images qui seront prises par le satellite pendant la journée suivante (et allouées à l'agent). Cet agent mesure sa propre satisfaction à l'aide d'une fonction d'utilité qui est pour l'instant la somme des poids des images attribuées. La contrainte d'efficacité se réduit à un simple problème d'optimisation : la fonction d'utilité de l'agent doit être maximisée sur l'ensemble des allocations admissibles. Voir par exemple [13] pour la description de quelques algorithmes résolvant ce problème d'allocation mono-agent.

Intéressons-nous maintenant au cas pour lequel plusieurs agents sont concernés par l'exploitation d'un satellite. Une hypothèse de première importance est que les utilités individuelles des agents sont mesurées sur une échelle commune – le même nombre exprime le même niveau de satisfaction. Nous reviendrons sur ce point plus tard. Pour simplifier, nous supposons dans cet article que les agents ont des droits égaux sur la ressource (nous supposons par exemple qu'ils ont financé le satellite à niveaux égaux). Bien entendu, chaque agent désire maximiser sa propre fonction d'utilité, mais généralement, elles sont antagonistes : augmenter l'utilité d'un agent peut conduire à diminuer l'utilité des autres. Ainsi, un compromis juste doit être trouvé, la réalisation de ce compromis étant du ressort de la fonction d'utilité collective. Dans ce contexte, la fonction min (ou mieux, l'ordre leximin) réalise l'objectif, puisqu'elle assure naturellement les requêtes d'équité : nous tentons de rendre l'agent le moins heureux aussi satisfait que possible.

Notons tout de même que, contrairement aux problèmes d'enchères, il n'y a pas de contraintes préemptives dans cette application : la même image peut être demandée par plusieurs agents, et attribuée à chacun d'entre eux.

Cette application a aussi un intérêt car elle offre des exemples de dépendances entre demandes issus du monde réel. Comme première illustration, nous considérons le cas des images stéréoscopiques. Un agent peut s'il le désire demander un couple d'images stéréoscopiques : dans ce cas, le fait de recevoir une seule image résulterait en un niveau de satisfaction peu élevé pour l'agent. Un second exemple provient du fait que pour les zones terrestres situées dans les hautes latitudes, plusieurs images de la même zone peuvent être prises au cours de révolutions distinctes du satellite pendant le même jour. En conséquence, supposons qu'une demande stéréoscopique concerne une telle zone, et supposons qu'elle puisse être réalisée indifféremment depuis deux révolutions. Soient $o11$ et $o12$ les images stéréoscopiques de la révolution 1, $o21$ et $o22$ celles de la révolution 2. La demande peut être assez naturellement formulée de la manière suivante : $(o11 \wedge o12) \vee (o21 \wedge o22)$.

Normalisation des utilités individuelles. Comme nous l'avons vu, les poids des demandes sont fixés de manière libre par les agents. Afin de pouvoir comparer les utilités individuelles entre les agents, une échelle d'utilité commune doit être créée et utilisée. Pour cela, nous adoptons une solution connue sous le nom de solution de Kalai-Smorodinsky [15, page 91], qui consiste à comparer les utilités individuelles relativement à l'utilité maximale que chaque agent peut recevoir. Plus précisément, définissons l'utilité individuelle maximale pour chaque chaque agent de la manière suivante :

$$\widehat{u}_i \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{\mathbf{x} \in Adm(\mathcal{C})} u_i(\mathbf{x}).$$

$\widehat{u}_i$ est l'utilité maximale qu'un agent pourrait recevoir s'il était le seul et unique utilisateur de la ressource. Ensuite, nous définissons l'utilité individuelle **normalisée** d'un agent de la manière suivante :

$$u'_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{u_i(\mathbf{x})}{\widehat{u}_i}.$$

Notons au passage que $\max_{\mathbf{x} \in Adm(\mathcal{C})} u'_i(\mathbf{x}) = 1$, pour chaque i. En d'autres termes, l'utilité maximale normalisée est la même pour tous les agents. L'utilité normalisée sera utilisée pour comparer les niveaux de satisfaction entre agents.

Pour résumer, notre problème d'allocation multiagent EOS peut être décrit formellement en utilisant le modèle de la section 2. Les images sont les objets à attribuer. Les agents expriment leurs demandes (pondérées) comme de simples propositions logiques. L'utilité individuelle d'un agent est la somme normalisée des poids des demandes satisfaites (f est $+$)[7]. La fonction d'agrégation utilisée pour l'utilité collective g est min (ou leximin en tant que rafinement efficace de la fonction min[8]. Dans cette application, un objet peut être attribué à différents agents (il n'y a pas de contraintes préemptives), et les demandes ne sont pas nécessairement atomiques.

[7] Notons que pour les besoins de la normalisation, les utilités individuelles normalisées sont désormais dans $\mathbb{R}^+$. Ceci ne modifie pas fondamentalement le problème.

[8] L'utilisation du leximin favorise l'équité, peut-être au détriment de la somme des utilités distribuées aux agents, ce dernier critère pouvant être perçu comme une mesure d'efficacité. Toutefois les allocations leximin-optimales restent nondominées au sens de Pareto, ce qui garantit une forme d'efficacité. Voir [13] pour d'autres approches du compromis efficacité/équité.

5 État de l'art

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, le partage de bien indivisibles a été traité (selon des perspectives très différentes) à la fois en théorie du choix social et en intelligence artificielle (et recherche opérationnelle). Aussi notre présentation de l'état de l'art sera-t-elle éclairée par cette dichotomie.

Choix social Dans ce domaine, les travaux en matière de partage de ressource, et particulièrement en matière de partage équitable, s'intéressent de prime abord aux problèmes qui impliquent des biens divisibles, des transferts monétaires et des contraintes d'admissibilité très simples. Cependant, quelques travaux récents s'intéressent au problème du partage de biens indivisibles sans transfert d'argent. En l'absence d'un langage de représentation compact, chacun de ces travaux tombe dans l'un de ces pièges : soit l'ensemble des relations de préférence ou les fonctions d'utilités sont restreintes, en général en renforçant l'additivité et ainsi en interdisant les synergies entre les biens (comme dans [5] et [2], qui réalisent la nécessité d'une représentation compacte, mais sans toutefois fournir de solution), soit l'élicitation de préférence et le calcul d'un partage optimal sont infaisables en pratique, comme cela est le cas dans [11], qui donne une procédure effective qui requiert le fait que les préférences soient données explicitement sous la forme d'un ordre linéaire sur l'ensemble des combinaisons de biens.

Enchères combinatoires Elles correspondent au cas $g = +$ (sans aucune restriction sur f). De nombreux « langages de lots » pour l'élicitation et la représentation des fonctions d'utilité ont été développés (voir [17] pour un aperçu récent). Les langages consistent soit en la spécification de « lots » (ensembles d'objets, interprétés comme des disjonctions soit inclusives, soit exclusives) associées à un prix [9, 20, 16], ou utilisent plus généralement les formules propositionnelles positives associées à des poids numériques, comme dans [1], qui semble être le langage le plus proche de celui développé en section 2.

Il est établi que la détermination de la meilleure allocation dans les enchères combinatoire est NP-difficile pour peu que les lots soient exprimés dans un langage compact ([18]). Des restrictions qui rendent ce problème d'une complexité raisonnable sont étudiées à plusieurs endroits (par exemple [18, 16, 22]). Ces résultats concernent la version standard de même que les nombreuses variantes des enchères combinatoires (comme par exemple les enchères renversées, les enchères multi-unités ou les échanges, comme dans [21]), mais le modèle est toujours purement utilitariste, et ainsi ne se préoccupe pas d'équité.

Négociation entre agents Une autre piste concernant le partage de biens indivisibles est celle de la **négociation multilatérale** ([19, 8, 6, 7], pour laquelle un partage initial est donné, et doit être négocié entre les agents, ceux-ci pouvant échanger des objets (avec des transferts monétaires possibles), pour aboutir à un meilleur partage – ce qui diffère de notre point de vue centralisé dans lequel les agents n'ont pas la possibilité d'agir indépendamment une fois que leurs préférences ont été exprimées. Toutefois, l'article [3] donne aussi des résultats de complexité, qui s'attachent au cas où les fonctions d'utilité des agents sont k-additives.

6 Conclusion

L'objectif de cet article était de proposer un modèle formel et général du partage de biens indivisibles entre des agents, avec des contraintes d'admissibilité arbitraires, et sans compensation monétaire possible.

Ce travail a été motivé à l'origine par une application issue du monde réel ayant trait à la commande de satellites d'observation de la Terre. Dans ce contexte, nous avons décrit le problème d'allocation qui consiste en la recherche de partages équitables et efficaces de ressources résultant de la co-exploitation des satellites d'observation par plusieurs pays ou entités. Cette application peut être complètement décrite dans le modèle proposé.

Ce modèle est orienté dans une perspective centralisée, dans laquelle les décisions sont prises par un arbitre impartial. Il est fondé sur deux idées principales. Tout d'abord, les agents peuvent exprimer leurs souhaits, dépendances et préférences sur les objets qu'ils désirent, dans un langage de représentation compact fondé sur la logique propositionnelle. Deuxièmement, le modèle proposé s'appuie sur deux niveaux d'utilité : l'utilité que chaque agent retire d'un partage donné, et l'utilité collective qui en résulte pour la société, ou pour l'arbitre. Plus grande est l'utilité collective, mieux la société se porte. Selon la manière de calculer l'utilité collective à partir des utilités individuelles des agents, le modèle peut représenter une étendue complète d'attitudes « éthiques », partant de l'attitude purement utilitariste jusqu'à celle purement égalitariste. D'un autre point de vue, le modèle proposé généralise le modèle désormais bien connu des enchères combinatoires, ajoutant à ce dernier la possibilité de prendre en compte des contraintes d'équité.

Quelques résultats de complexité à propos de ce modèle ont aussi été présentés. Comme nous pouvions le pressentir, les résultats ont montré que le problème de recherche d'un partage optimal est généralement difficile.

Plusieurs développement importants de ce modèle restent à étudier. Les points suivants sont particulièrement intéressants :
- le développement d'algorithmes effectifs pour le calcul de bons partages, spécialement pour de grandes instances,
- le lien avec d'autres notions qui caractérisent l'équité, comme **l'absence d'envie**, **la juste part**, et **la cohérence** ([24, 15]), ou encore les indices d'inégalité ([14]),
- l'étude de manipulations possibles par les agents, et le développement de procédures qui pourraient les prévenir.

Références

[1] C. Boutilier and H. H. Hoos. Bidding languages for combinatorial auctions. In **Proc. of (IJCAI-01)**, pages 1211–1217, 2001.

[2] S. Brams, P. Edelman, and P. Fishburn. Fair division of indivisible items. Technical Report RR 2000-15, C.V. Starr Center for Applied Economics, New York, 2000.

[3] Y. Chevaleyre, U. Endriss, and N. Maudet. Protocols for tractable resource allocation with k-additive utilities. In **Troisièmes Journées Francophones sur les Modèles Formels d'Interaction (MFI-2005)**. Cépaduès-Éditions, 2005.

[4] S. Coste-Marquis, J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In **Proceedings of KR-2004**, pages 203–212, 2004.

[5] S. Demko and T. Hill. Equitable distribution of indivisible items. **Mathematical Social Sciences**, 16 :145–158, 1998.

[6] P. Dunne, M. Wooldridge, and M. Laurence. The complexity of contract negotiation. **Artificial Intelligence**, 2005.

[7] U. Endriss and N. Maudet. On the communication complexity of multilateral tradings. In **Proc. of AAMAS-04**, 2004.

[8] U. Endriss, N. Maudet, F. Sadri, and F. Toni. Resource allocation in egalitarian agent societies. In **Secondes Journées Francophones sur les Modèles Formels d'Interaction (MFI-2003)**, pages 101–110. Cépaduès-Éditions, 2003.

[9] Y. Fujishima, K. Leyton-Brown, and Y. Shoham. Taming the complexity of combinatorial auctions : optimal and approximate approaches. In **Proc. of IJCAI'99**, pages 548–553, 1999.

[10] M. Garey and D. Johnson. **Computers and intractability : a guide to the theory of NP-completeness**. Freeman, 1979.

[11] D. Herreiner and C. Puppe. A simple procedure for finding equitable allocations of indivisible goods. **Social Choice and Welfare**, 19 :415–430, 2002.

[12] J. Lang. Logical preference representation and combinatorial vote. **Annals of Math. and Artificial Intelligence**, 42(1) :37–71, 2004.

[13] M. Lemaître, G. Verfaillie, F. Jouhaud, J.-M. Lachiver, and N. Bataille. Selecting and Scheduling Observations of Agile Satellites. **Aerospace Science and Technology**, (6) :367–381, 2002.

[14] H. Moulin. **Axioms of Cooperative Decision Making**. Cambridge University Press, 1988.

[15] H. Moulin. **Fair division and collective welfare**. MIT Press, 2003.

[16] N. Nisan. Bidding and allocation in combinatorial auctions. In **2nd ACM Conf. on Electronic Commerce**, 2000.

[17] N. Nisan. **Combinatorial auctions**, chapter Bidding languages. MIT Press, 2005.

[18] M. Rothkopf, A. Pekec, and R. Harstad. Computationally manageable combinatorial auctions. **Management Science**, 44(8) :1131–1147, 1998.

[19] T. Sandholm. Contract types for satisficing task allocation : Theoretical results. In **AAAI Spring Symposium on Satisficing Models**, 1998.

[20] T. Sandholm. Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. **Artificial Intelligence**, 134 :1–54, 2002.

[21] T. Sandholm, S. Suri, A. Gilpin, and D. Levine. Winner determination in combinatorial auctions generalizations. In **Proc. of AAMAS-02**, 2002.

[22] M. Tennenholtz. Some tractable combinatorial auctions. In **Proceedings of AAAI-00**, 2000.

[23] R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 18 :183–190, 1988.

[24] H. P. Young. **Equity in Theory and Practice**. Princeton University Press, 1994.