# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

Sylvain Bouveret[*,†] sylvain.bouveret@onera.fr
Michel Lemaître[*] michel.lemaitre@onera.fr

[*]Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales–DCSD.
2, avenue Edouard Belin. BP 4025.
31055 TOULOUSE Cedex 4 – FRANCE.

[†]Institut de Recherche en Informatique de Toulouse.
118, route de Narbonne.
31062 TOULOUSE Cedex – FRANCE.

**Résumé :**
On s'intéresse à la prise de décision collective et coopérative dans un groupe d'agents ayant des préférences individuelles s'exprimant par des utilités numériques. Dans ce modèle, les préférences des agents sont agrégées en une préférence commune à l'aide d'une fonction d'utilité collective, traduisant ainsi de manière formelle le critère «éthique» choisi par la collectivité. La plupart des travaux issus du choix social supposent que les agents sont égaux *a priori* vis-à-vis de la prise de décision, mais ce n'est pas toujours le cas pour des problèmes réels. Nous nous intéressons à la construction et à l'étude de fonctions d'utilité collective prenant en compte ces droits inégaux.

**Mots-clés :** Modèles économiques de la décision, choix social, allocation centralisée de tâches et de ressources, résolution coopérative de problèmes

**Abstract:**
We study the collective and cooperative decision making in a group of agents having unequal rights expressed by numerical utilities. In that framework, the agents' preferences are aggregated into a common decision using a collective utility function that encompasses the "ethical" criterion choosen by the society of agents. Most social choice works assume that the agents are equal *a priori* as regards the collective decision making, but this is not always the case in real-world problems. In this paper, we focus on the construction and the study of collective utility functions that take unequal rights into account.

**Keywords:** Economical models of decision making, social choice, centralized tasks and resource allocation, cooperative problem solving

## 1 Introduction

On s'intéresse aux problèmes dans lesquels un groupe d'agent doit s'accorder de manière collective et coopérative sur une décision commune choisie parmi un ensemble de décisions admissibles. Dans la littérature, ce type de problèmes est classiquement décrit par le modèle utilitariste [1]. Dans ce modèle, on admet que l'on est capable de mesurer le « bien-être » de chaque agent sous la forme d'une fonction d'utilité individuelle qui associe chaque décision potentielle à un indice numérique, l'*utilité individuelle*. Le problème de choix de la bonne décision pour le groupe d'agents se ramène donc à la donnée de l'ensemble des utilités individuelles pour chaque décision admissible. On supposera ici que toutes les utilités individuelles sont exprimées de manière sincère par les agents sur une échelle commune, et on ne s'intéressera pas au problème de l'élicitation de ces préférences.

Le choix entre les décisions admissibles se fait à l'aide d'une *fonction d'utilité collective* (CUF pour *Collective Utility Function*) dont le rôle est d'agréger l'ensemble des utilités individuelles en une *utilité collective*, représentant le « bien-être » du groupe vis-à-vis de chaque décision potentielle. Cette CUF est supposée choisie de manière consensuelle, ou émane d'une instance de décision supérieure (un arbitre). Le processus de prise de décision se ramène alors à déterminer la décision qui maximise la CUF. Si l'application de cette approche à des problèmes macroéconomiques est très criticable (et criti-

1. À ne pas confondre avec l'*utilitarisme classique* qui est une manière particulière d'agréger les utilités individuelles.

quée [Sen95]), elle reste utile à l'échelle microéconomique pour étudier et formaliser les problèmes de décision collective en contexte limité et à enjeux restreints. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons.

La CUF la plus fréquemment proposée est la somme des utilités individuelles (*utilitarisme classique*). Avec cette fonction, chaque agent est considéré comme producteur d'utilité collective, et plus chacun produit, plus le groupe est satisfait. Un peu moins classique, la CUF *égalitariste* consiste à prendre, pour utilité collective, le minimum des utilités individuelles (la satisfaction du groupe est celle du moins satisfait des membres du groupe), ce qui correspond à une vision radicalement différente de la justice sociale [Raw71]. Entre ces deux extrêmes, il y a place pour de nombreuses CUF intermédiaires (voir par exemple [Mou88, chapitre 2] ou [ASS02, chapitre 12]).

S'il existe de nombreux travaux sur les CUF, la plupart de ces travaux considèrent implicitement le cas d'agents situés au départ sur un pied d'égalité, nous dirons ayant des droits exogènes égaux. Cette supposition, qui se traduit par exemple en théorie du vote par le principe «*une personne, une voix*», s'exprime dans le modèle utilitariste par la symétrie des CUF. Pourtant, dans beaucoup de situations concrètes, ce n'est pas le cas, car les agents ne doivent pas avoir le même poids dans la décision collective, pour des raisons aussi diverses que celles exposées dans les exemples présentés ci-après. Dans cet article, nous traduirons cette différence d'importance entre agents par la notion de *droits des agents*, ces droits étant représentés par des indices numériques : plus le droit est élevé, plus l'agent est censé bénéficier de la décision, d'une manière que nous cherchons à capturer précisément. Ce problème est lié avec celui des *indices de pouvoir* [FM98] en théorie du vote, dans un contexte cependant légèrement différent, puisque dans ce contexte la procédure de vote est en général fixée, et l'on cherche soit à attribuer les droits aux votants de manière à ce qu'ils aient un certain pouvoir de vote, soit, les droits étant fixés, on cherche à analyser le pouvoir de vote de chaque votant.

Voici quelques exemples de problèmes d'allocation de ressources, qui seront repris en section 6 :

— un bien de consommation (ressource) à répartir entre plusieurs populations (agents) de tailles (droits) différentes ;
— un ensemble de représentants (ressource) de circonscriptions (agents) de tailles (droits) différentes à désigner pour un comité de taille fixée ;
— l'actif (ressource) – inférieur aux dettes – d'une société en faillite à répartir entre ses créanciers (agents), auquels l'entreprise doit des montants (droits) différents ;
— une ressource industrielle commune exploitée par plusieurs agents ayant participé de manière inégale à son financement, chacun attendant un retour sur investissement (droits) proportionnel à celui-ci (voir le problème de partage de ressources satellitaires [LVB99]) ;
— une ressource à partager entre plusieurs agents qui la transforment en biens revendus au bénéfice du groupe, les agents ayant des productivités différentes [2].

Dans cet article, nous nous intéressons à la prise en compte de droits inégaux dans le modèle utilitariste. Après avoir défini formellement la notion de droits inégaux en section 2 nous introduisons quelques exemples de CUF à droits égaux ou inégaux, qui illustreront l'ensemble de l'article. Les sections 4 et 5, qui constituent les principales contributions de cet article, concernent respectivement le principe de duplication, au cœur du schéma proposé,

2. Cet exemple est à la limite du cadre des droits exogènes, car la «productivité» d'un agent constitue plutôt une propriété intrinsèque de sa fonction d'utilité. Cependant, son traitement (section 6) apporte une solution tout-à-fait plausible.

et l'extension des propriétés classiques des CUF aux droits inégaux ainsi que l'introduction de nouvelles propriétés liées à ces droits. La suite de l'article traite de CUF réalisant des compromis entre l'égalitarisme et l'utilitarisme classique (section 7), et enfin quelques idées sont introduites sur la prise en compte de droits inégaux dans un contexte pour lequel ces droits sont ordinaux (section 8).

## 2 Formalisation et notations

L'ensemble de $n$ agents est noté $N = \{1, \ldots, n\}$. La décision collective est à prendre dans un ensemble $\mathcal{A}$ de décisions admissibles. La décision admissible $a$ apporte à chaque agent $i$ l'utilité $u_i(a)$. À chaque décision admissible $a$ correspond un *profil d'utilité* $\overrightarrow{u}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_1(a), \cdots, u_n(a)\rangle$, écrit simplement $\overrightarrow{u} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_1, \cdots, u_n\rangle$ lorsque $a$ est sous-entendue. L'ensemble des agents doit s'accorder sur une CUF à maximiser, ou s'en remettre pour ce choix à un arbitre impartial. Cette CUF est notée $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Les droits inégaux des agents sont donnés par un vecteur $\overrightarrow{e} \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_1, \cdots, e_n\rangle$ ($e$ pour *entitlement*), et on notera $m = \sum_i e_i$. Nous considérons sans perte de généralité que les $e_i$ sont des entiers naturels ($e_i \in \mathbb{N}$) : si, pour les besoins d'une application quelconque, les droits sont dans $\mathbb{Q}$, nous pouvons raisonner sur des droits entiers proportionnels au vecteur $\overrightarrow{e}$ grâce à la propriété d'Indépendance à l'Échelle Commune de Droits introduite en section 5 (nous excluons les droits non rationnels). Une CUF à droits inégaux sera notée $W_{\overrightarrow{e}}$.

## 3 Exemples repères

Nous allons montrer comment, dans un même contexte initial, plusieurs CUF peuvent se justifier, lorsque les droits peuvent être égaux ou inégaux. Le problème est le suivant : une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau captée. Ils doivent décider ensemble de la quantité d'eau $a_i$ allouée annuellement à chaque fermier $i$, toutes les distributions n'étant pas admissibles (quantité limitée, tuyaux plus ou moins gros...). De sa quantité d'eau $a_i$, le fermier $i$ retire une utilité individuelle $u_i(a_i)$. Même si les fermiers ont une capacité de travail identique, cette fonction est propre à chaque fermier (par exemple ils ne cultivent pas tous les mêmes plantes, les sols n'ont pas le même rendement...), et on admettra qu'il existe une échelle commune des utilités (par exemple des euros).

### 3.1 Avec des droits égaux

**Utilitarisme classique :** La collectivité s'intéresse à l'utilité globale produite. La CUF naturelle est $W(\overrightarrow{u}) = \sum_i u_i$. Noter l'interchangeabilité des utilités individuelles : pour atteindre un haut niveau d'utilité collective, un bas niveau d'utilité produite par une ferme devra être compensé par un bon niveau d'une autre. Un litre d'eau supplémentaire ira au fermier ayant la plus grande utilité individuelle marginale [3]. Si l'utilité individuelle représente ou est liée au salaire du fermier, le choix de cette CUF implique qu'un fermier sera amené à se sacrifier pour la communauté.

**Égalitarisme :** L'utilité individuelle représente le revenu du fermier. La collectivité s'intéresse maintenant à une répartition équitable de l'utilité produite par chaque fermier. Une fonction qui convient est $W(\overrightarrow{u}) = \min_i u_i$, car elle tend à la fois à égaliser les revenus et à les tirer vers le haut. Noter l'absence d'interchangeabilité des utilités individuelles : un litre d'eau supplémentaire ira au fermier ayant l'utilité la plus faible, même si ce litre est plus

3. En supposant que l'utilité individuelle, fonction de la quantité d'eau reçue n'est pas décroissante, et à condition que les contraintes d'admissibilité soient satisfaites.

productif en utilité dans une autre ferme [4].

### 3.2 Avec des droits inégaux

On introduit des droits inégaux $e_i \in \mathbb{N}$, chaque $e_i$ correspondant au nombre de personnes qui habitent la ferme $i$.

**Division avec utilitarisme classique :** L'utilité représente le revenu de la ferme. Elle est divisée entre chaque habitant individuellement. Chaque habitant reçoit donc $u_i/e_i$. La collectivité s'intéresse au bien-être collectif mesuré par la somme de ce que reçoivent tous les habitants. La CUF est donc $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \sum_i (e_i \cdot (u_i/e_i)) = \sum_i u_i$.

**Division avec égalitarisme :** C'est le même cas de figure, mais la collectivité veut répartir équitablement l'utilité individuelle reçue par chacun des fermiers. Une CUF convenable est alors $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \min_i(u_i/e_i)$.

**Indivision avec utilitarisme classique :** On change maintenant de point de vue sur l'utilité individuelle. L'utilité $u_i$ caractérise la «prospérité» de la ferme $i$, et mesure en quelque sorte l'agrément d'y habiter, chaque habitant d'une ferme jouissant de manière équivalente de la prospérité de sa ferme et de celle-ci seulement. Chaque habitant de la ferme $i$ reçoit donc l'utilité $u_i$ de manière indivisible. Puis, la collectivité cherche à maximiser l'agrément total de tous les habitants, mesurée comme la somme des utilités reçues par les habitants. L'utilité collective est alors la somme pondérée $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \sum_i (e_i \cdot u_i)$.

**Indivision avec égalitarisme :** Le point de vue sur l'utilité est le même que dans l'exemple précédent, mais la collectivité s'intéresse maintenant à une répartition équitable entre chacun des habitants individuellement. L'utilité collective convenable est $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \min_i u_i$.

Cette série d'exemples illustre la diversité des CUF possibles, selon le but poursuivi par la communauté et la nature des satisfactions des agents, en présence de droits inégaux. Dans la suite de l'article, nous chercherons à rendre compte de manière systématique de ces différentes formes, et éventuellement à en proposer de nouvelles.

## 4 Principe de duplication

Le *principe de duplication* est un moyen de résoudre le problème de prise de décision collective en présence de droits inégaux. L'idée est de remplacer chaque agent par autant de *clones* qu'il possède de droits (ou d'un nombre de clones proportionnel à ses droits si les droits ne sont pas des entiers), l'utilité reçue par chaque agent étant répartie – d'une manière qui est discutée plus loin – entres ses clones. L'idée est ensuite de se ramener à un problème de décision collective entre les $m$ clones considérés avec des droits égaux. Le raisonnement vise à conférer à chaque agent un «pouvoir de décision» égal ou proportionnel à son droit [5].

Ce principe est proposé dans quelques travaux (voir [BT96]), mais il est toujours appliqué dans un contexte de division équitable de ressource, qui conduit à la fonction $\min_i u_i/e_i$, ce qui n'est pas toujours pertinent, comme nous l'avons vu dans les exemples de la section 3. Nous proposons donc une formalisation du principe de duplication, autorisant une utilisation plus large que celle qu'on lui donne habituellement et faisant intervenir deux paramètres :

— la manière dont l'utilité d'un agent est répartie entre ses clones,

— la CUF jouant sur la société des clones.

D'abord nous définissons une *fonction de répartition*, dont le rôle est de faire corres-

4. Notons que la fonction $\min$ a un inconvénient majeur, appelé *effet de noyade* : les profils d'utilité $\langle 3,3,3\rangle$ et $\langle 3,5,10\rangle$ sont équivalents au sens du $\min$, alors que le second est collectivement préférable. L'ordre collectif leximin pallie cet inconvénient, mais pour simplifier, nous ne l'introduirons pas ici.

5. Cette notion mérite encore d'être précisée et formalisée, à la manière des pouvoirs de vote dont la transcription dans un contexte utilitariste ne semble pas immédiate.

pondre à l'utilité $u_i$ d'un agent $i$ et à son droit $e_i$ l'utilité $r_i$ d'un de ses clones :

**Définition 1 (Fonction de répartition)** *Une* fonction de répartition *est une fonction* $\div : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Deux fonctions de répartition sont naturelles. D'une part la division ordinaire $u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u/e$, qui prend son sens dans le cas d'une satisfaction devant être nécessairement divisée entre les clones, nous dirons lorsque les utilités individuelles sont *préemptives*, et d'autre part la simple réplication $u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u$, qui convient dans le cas d'une satisfaction qui ne s'épuise pas lorsqu'elle est partagée (exemple de la «prospérité» en section 3).

**Définition 2 (Principe de duplication)** *Soient un vecteur de droits $\overrightarrow{e}$ sur $n$ agents, une CUF à droits égaux $W : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, une fonction de répartition $\div$, on définit, par duplication, une CUF à droits inégaux $W_{\overrightarrow{e}}^{\div}$ par :*

$$W_{\overrightarrow{e}}^{\div} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & W(\overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div}) \end{array}, \textit{ avec}$$

$$\overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div} \stackrel{\text{def}}{=} \big(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{e_1 \textit{ fois}}, \ldots, \underbrace{r_n, \ldots, r_n}_{e_n \textit{ fois}}\big),$$

*et $r_i = u_i \div e_i$.*

Énumérons les quatre CUF à droits inégaux qui résultent des deux choix possibles introduits pour $\div$ et pour $W$ :

| | $u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u/e$ (division) | $u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u$ (réplication) |
|---|---|---|
| $W \stackrel{\text{def}}{=} \sum^{(m)}$ (utilitarisme cl.) | $\sum_{i \in N} u_i$ | $\sum_{i \in N} (e_i \cdot u_i)$ |
| $W \stackrel{\text{def}}{=} \min^{(m)}$ (égalitarisme) | $\min_{i \in N} (u_i/e_i)$ | $\min_{i \in N} u_i$ |

Nous avons indiqué d'un mot-clé la caractéristique importante de chaque fonction de répartition (division / réplication), et de même pour la CUF sur les clones (utilitarisme classique / égalitarisme). Les notations $\sum^{(m)}$ et $\min^{(m)}$ rappellent que ces opérateurs portent sur $m$ opérandes. On notera que la CUF $\min_i(u_i/e_i)$ tend vers l'égalité des rapports $u_i/e_i$ et donc vers la proportionalité des utilités individuelles par rapport aux droits.

# 5 Propriétés

L'introduction de droits inégaux dans le domaine de la prise de décision collective modifie non seulement la notion de CUF, mais aussi les propriétés raisonnables classiques qui permettent de caractériser ces fonctions d'utilité. Nous essayons ici d'abord d'adapter la définition des principales propriétés des CUF afin qu'elles prennent en compte les droits exogènes inégaux, puis nous introduisons de nouvelles propriétés directement liées à la notion de droits exogènes.

## 5.1 Propriétés classiques étendues

La propriété fondamentale des CUF classiques est la notion d'unanimité, ou, en d'autres termes, de compatibilité avec la relation de Pareto. Cette propriété peut s'exprimer comme suit. Soient $a$ et $b$ deux décisions collectives. Si $\forall k \in N,\ u_k(b) \geq u_k(a)$, et si $\exists i \in N$ tel que $u_i(b) > u_i(a)$, alors $W(\overrightarrow{u}(b)) > W(\overrightarrow{u}(a))$ : si l'on peut améliorer le sort d'un agent sans détériorer celui des autres, on le fait. L'expression de cette propriété ne change pas avec l'introduction de droits exogènes inégaux.

Outre l'unanimité, la propriété d'anonymat est très souvent requise. Elle traduit le fait que l'utilité collective est indépendante de l'identité des agents, donc que la CUF est insensible à toute permutation des composantes du profil d'utilité. En présence de droits inégaux, cette définition doit être adaptée, car l'identité d'un agent s'exprime par le couple (utilité, droit) :

**Définition 3 (Anonymat généralisé)** *Soit $W_{\overrightarrow{e}}$ une CUF à droits inégaux. $W_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété d'*anonymat généralisé *si et seulement si $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \sigma$ permutation de $N$, $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = W_{\langle e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)}\rangle}(\langle u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(n)}\rangle)$.*

La propriété suivante concerne l'indépendance de l'utilité collective vis-à-vis des agents non concernés (IUA pour *Independance of Unconcerned Agents*). Cela exprime le fait qu'un agent ne doit pas être pris en compte pour le choix entre deux décisions si son utilité individuelle entre ces deux décisions reste la même (il n'est pas concerné par la décision). Nous proposons une propriété plus forte dans le cadre des droits inégaux : ni l'utilité ni le droit de l'agent n'influent sur le choix entre les deux décisions.

**Définition 4 (IUA généralisée)** *Une CUF à droits inégaux $W_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété d'IUA généralisée si et seulement si pour tout quadruplet de profils d'utilité $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ et toute paire de vecteurs de droits $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e}')$ tels que :*
*— pour un agent $i$ : $u_i = v_i$ et $u'_i = v'_i$,*
*— pour tout agent $k \neq i$ : $u_k = u'_k$, $v_k = v'_k$, et $e_k = e'_k$,*
*nous avons : $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \leq W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{u}') \leq W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{v}')$.*

$\overrightarrow{e}'$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ sont des répliques de $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sauf pour l'agent $i$. Entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, l'utilité de l'agent $i$ ne change pas ( $u_i = v_i$ ), ni entre $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$, *même si son droit a pu changer*. Dans ces conditions, si collectivement on préfère $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ sous $\overrightarrow{e}$, alors on doit préférer $\overrightarrow{u}'$ à $\overrightarrow{v}'$ sous $\overrightarrow{e}'$. Si cette propriété n'est pas vérifiée, alors le choix entre deux décisions dépendra de l'utilité ou du droit de l'agent $i$, même si cet agent est complètement indifférent entre ces deux décisions, ce qui intuitivement peut être non souhaitable.

## 5.2 Propriétés relatives aux droits

L'idée intuitive liée à la notion de droits exogènes est que plus le droit d'un agent est élevé, plus il doit bénéficier de la décision collective. Cette idée informelle peut se traduire de différentes manières. La propriété la plus simple que l'on peut tirer de ce principe est que l'augmentation du droit d'un agent ne peut pas renverser une préférence collective qui déjà l'avantageait.

Par exemple, soient $\overrightarrow{u} = \langle 4,7,4,2\rangle$ et $\overrightarrow{v} = \langle 1,5,3,8\rangle$. Supposons que, pour un vecteur de droits $\overrightarrow{e}$, on ait $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \geq W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v})$. Entre les deux profils, le préféré est celui qui avantage, entre autres, l'agent 2. Si nous augmentons le droit de l'agent 2 sans modifier celui des autres agents, pour obtenir le vecteur $\overrightarrow{e}'$, nous ne pouvons avoir $W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{v}) \geq W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{u})$. Si tel était le cas, la collectivité préfèrerait un profil d'utilité qui désavantage maintenant l'agent 2, alors que son droit a augmenté.

**Définition 5 (Conformité)** *Soient $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{e}'$ deux vecteurs de droits tels que $e_k = e'_k$ pour tout $k \neq i$, et $e_i < e'_i$, et soit $W_{\overrightarrow{e}}$ une CUF à droits inégaux. $W_{\overrightarrow{e}}$ vérifie la propriété de* conformité *si et seulement si pour toute paire de profils d'utilité $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a $(W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \geq W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v})$ et $u_i > v_i) \Rightarrow W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{u}) \geq W_{\overrightarrow{e}'}(\overrightarrow{v})$.*

L'intérêt principal de cette propriété porte sur la décision collective optimale : si l'on augmente le droit relatif d'un certain agent, alors il ne peut pas finir avec une utilité moindre qu'avant son augmentation [6].

6. Dans toute la suite, les preuves seront omises et pourront être trouvées dans la version longue de l'article en `http://www.cert.fr/dcsd/THESES/sbouveret/ressources/MFI07/MFI07_long.pdf`

Cette propriété n'est pas sans rappeler le postulat du transfert relatif aux indices de pouvoir et aux procédures de votes pondérées [FM98].

**Proposition 1** *Soient $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{e}'$ deux vecteurs de droits tels que $e_k = e'_k$ pour tous $k \neq i$, et $e_i < e'_i$, et soit $W_{\overrightarrow{e}}$ une CUF. Nous notons $\widehat{a}_{\overrightarrow{e}} = \operatorname{argmax}_{a \in \mathcal{A}} W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}(a))$ une décision collective optimale selon $W_{\overrightarrow{e}}$. Si $W_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété de conformité, alors il existe une décision collective optimale $\widehat{a}_{\overrightarrow{e}'}$ selon $W_{\overrightarrow{e}'}$ telle que $u_i(\widehat{a}_{\overrightarrow{e}'}) \geq u_i(\widehat{a}_{\overrightarrow{e}})$.*

La propriété de conformité est une traduction possible de l'idée selon laquelle les droits inégaux ont un effet «positif» dans le partage. Cette idée d'effet «positif» peut se traduire d'une manière différente : toute chose étant égale par ailleurs, il vaut mieux choisir la décision qui avantage, entre deux agents ayant des droits inégaux, l'agent ayant un plus grand droit.

**Définition 6 (Avantage aux droits élevés)** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux profils d'utilité tels que $u_i = v_j$, $u_j = v_i$ et $u_k = v_k$ $\forall k \in N \setminus \{i, j\}$ ($\overrightarrow{v}$ est égal au profil $\overrightarrow{u}$ dans lequel on a permuté $u_i$ et $u_j$), avec $u_i > u_j$, et soit $W_{\overrightarrow{e}}$ une CUF à droits inégaux. Alors $W_{\overrightarrow{e}}$* avantage les droits élevés *si et seulement si pour tout $\overrightarrow{e}$, $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v}) \leq W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow e_i \geq e_j$.*

Cette notion d'avantage aux droits élevés n'est pas équivalente à la propriété de conformité, même si elle traduit différemment la même idée intuitive, car il existe des CUF à droits inégaux qui satisfont la propriété de conformité sans vérifier la propriété d'avantage aux droits élevés (la fonction somme non pondérée, correspondant à l'utilitarisme avec division de la ressource, est un exemple d'une telle fonction). L'existence d'un lien entre l'avantage aux droits élevés et la conformité, éventuellement lié aux autres propriétés (IUA généralisée, anonymat, unanimité), ou aux propriétés analytiques des CUF (continuité) n'est pas encore claire.

Une dernière propriété souhaitable des CUF prenant en compte des droits exogènes inégaux est leur insensibilité à une dilatation proportionnelle de l'échelle commune d'expression de ces droits inégaux. En d'autres termes, une CUF à droits inégaux doit classer les décisions de la même manière, que le vecteur de droits soit $\overrightarrow{e}$, $2 \cdot \overrightarrow{e}$ ou bien $100 \cdot \overrightarrow{e}$.

**Définition 7 (IDCD)** *Soit $W_{\overrightarrow{e}}$ une CUF à droits inégaux. $W_{\overrightarrow{e}}$ est* insensible à une dilatation commune des droits *(IDCD) si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \overrightarrow{e}$ vecteur de droits, et pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de profils d'utilité, $W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \geq W_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow W_{k \cdot \overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \geq W_{k \cdot \overrightarrow{e}}(\overrightarrow{v})$.*

### 5.3 Application aux CUF introduites

La proposition suivante caractérise les CUF à droix inégaux introduites précédemment à l'aide des propriétés définies ci-avant.

**Proposition 2** *Les fonctions somme, somme pondérée,* min *et* min *pondéré satisfont les propriétés marquées «oui» de la table 1, et ne satisfont pas les propriétés marquées «non» de cette même table.*

## 6 Applications

Dans cette section, nous appliquons le schéma méthodique proposé à quelques situations «microéconomiques» dans lesquelles apparaissent naturellement des droits exogènes. Si le choix de la CUF et de la fonction de répartition sont souvent assez naturels, dans certains cas il peut être

| | unanimité | anonymat généralisé | IUA généralisée | conformité | avantage aux droits élevés | IDCD |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum_i e_i \cdot u_i$ | oui | oui | oui | oui | oui | oui |
| $\sum_i u_i$ | oui | oui | oui | oui | **non** | oui |
| $\min_i u_i/e_i$ | **non** [a] | oui | oui | oui | oui | oui |
| $\min_i u_i$ | **non** [a] | oui | oui | oui | **non** | oui |

*a.* Ce non-respect de la propriété d'unanimité est lié à l'effet de noyade de la fonction $\min$, et non aux droits inégaux eux-mêmes. Cet inconvénient est classiquement pallié par l'introduction du préordre leximin à la place de la fonction $\min$.

TABLE 1 – CUF à droits exogènes inégaux et leurs propriétés.

discutable. Notre point de vue n'est pas normatif (nous ne cherchons pas à imposer de solution) ; nous cherchons juste à mettre en évidence le pouvoir descriptif du schéma.

**Répartition d'un bien vital** Une ONG doit répartir une quantité de riz entre différents pays sinistrés par la famine. Les pays (agents) sont de tailles (droits) différents. L'utilité reçue par un habitant est sa quantité de riz. La fonction de répartition est ici la division. Prenant en compte le caractère de répartition égalitariste suggéré par la nature vitale de la ressource, on conclut à la CUF $\min u_i/e_i$ (allocation proportionnelle à la taille des populations).

**Banqueroute** (présenté en section 1) Le cas relève assez clairement de la répartition d'utilité par division d'une part, et d'autre part au point de vue égalitariste sur la préférence collective. Ce qui conduit à la CUF $\min_i u_i/e_i$. Si l'utilité se mesure directement en monnaie, maximiser cette fonction revient à allouer l'actif proportionnellement aux créances. C'est la solution classiquement proposée pour ce problème, mais d'autres se justifient également (voir par exemple [You94, chapitre 4]).

**Constitution de comité** (présenté en section 1) L'utilité reçue par une circonscription est son nombre de représentants, et dans ce cas il y a une exigence égalitariste sur la préférence collective (égalité de représentation pour chaque habitant). Pour ce qui est de la fonction de répartition, la division semble la plus sensée (un représentant partage son temps entre les habitants de sa circonscription), ce qui conduit encore à la CUF $\min_i u_i/e_i$, c'est-à-dire à une allocation tendant vers la proportionalité du nombre de représentants par rapport aux populations, «tendant vers», car la difficulté de ce problème tient au fait que la proportionalité exacte peut rarement être atteinte, du fait que le nombre de représentants est entier. Maximiser la fonction $\min_i u_i/e_i$ revient alors à une attribution des sièges selon la méthode de J. Q. Adams, dite du plus petit diviseur (voir [BY01, appendix A, proposition 3.10], qui donne aussi d'autres solutions pour ce problème).

**Ressource commune avec différents investissements initiaux** (présenté en section 1) L'exploitation en commun d'une ressource correspond intuitivement à la division de la ressource entre les agents, et l'équité suggérée par la nature du problème implique de manière naturelle la CUF égalitariste. Nous avons donc encore une fois affaire à la CUF $\min_i u_i/e_i$ (allocation proportionnelle à la hauteur de l'investissement).

**Productivités différentes** (présenté en section 1) Chaque agent est ici remplacé par un ensemble de clones tous également productifs, la production d'un agent étant la somme de la production de ses clones (fonction de répartition division). Le problème est utilitariste classique, car peu importe ce que produit chaque agent en particulier, seule la production totale compte, ce qui nous donne une CUF $\sum u_i$.[7]

**Prix du kWh** Une compagnie distributrice d'électricité doit fixer un prix de vente du kWh d'énergie électrique pour les utilisateurs de son réseau. Ces utilisateurs sont réunis en communes (les agents), et le prix de vente fixé pour une commune constitue une désutilité identique $u_i$ (utilité négative) pour tous les habitants de cette commune, donc la fonction de répartition entre les «clones» d'une même commune est la réplication. La répartition du coût doit être égalitariste, car il s'agit d'un bien public indispensable. La fonction d'utilité à considérer est donc $\min_i u_i$ : la taille de la commune (donc le droit exogène) n'importe pas.

**Infrastructures collectives** Un nombre limité d'infrastructures collectives, plutôt de loisirs, doit être alloué à un certain nombre de villes (agents) ayant des populations de tailles différentes (droits). Soit $k_i$ le nombre d'infrastructures allouées à la ville $i$. L'utilité de la décision $k$ pour la ville $i$ est $u_i(k_i)$. S'agissant d'un équipement de loisir, on peut mesurer l'utilité collective par la somme des satisfactions de chaque habitant. Si l'on admet que tous les habitants de la ville $i$ jouissent d'une manière égale de la présence des $k_i$ théâtres de la ville, alors l'utilité de chaque habitant (clone) est aussi $u_i(k_i)$ (réplication). Selon ce raisonnement, la CUF qu'il convient de maximiser est $\sum_i(e_i \cdot u_i)$. Si maintenant l'équipement collectif n'avait pas un caractère de loisir mais de bien vital – comme un hôpital –, nous serions plutôt dans le cas (égalitarisme / réplication) et la CUF convenable serait $\min_i u_i$.

**La radio** $n$ groupes (nos $n$ agents) partagent un espace commun doté d'un poste de radio pouvant diffuser $n$ stations différentes. Les $e_i$ (droits) membres du groupe $i$ sont tous amateurs de la station $i$, et de celle-ci seulement. Il faut donc décider de la façon de partager le temps de diffusion du poste entre les $n$ stations. Nous notons $x_i$ la fraction de temps de diffusion dédiée à la station $i$ ($\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$) : nous considérerons que l'utilité de l'agent/groupe $i$ est égale à $x_i$. Ici l'équité est primordiale, donc l'égalitarisme s'impose. En revanche le choix de la fonction de répartition est sujet à deux interprétations, ce qui rend l'exemple intéressant.

La première interprétation est que l'on partage du temps de «satisfaction» : un agent écoutant sa station préférée pendant un temps $x_i$ sera satisfait à hauteur de $x_i$. C'est un cas de réplication, donnant la CUF $\min_i u_i = \min_i x_i$ : on alloue un temps de diffusion égal pour chaque station, sans se soucier du nombre d'amateurs de la station $i$. La seconde interprétation est que l'on partage le temps pendant lequel un groupe peut choisir sa station préférée, et dans ce cas, l'utilité $x_i$ d'un agent est divisible entre ses clones (chaque clone peut choisir sa station préférée pendant un temps $x_i/e_i$) : la fonction de répartition est la division, ce qui aboutit à la CUF $\min_i u_i/e_i = \min_i x_i/e_i$. Maximiser cette fonction revient à allouer un temps de diffusion proportionnel au nombre d'amateurs d'une station.

Cet exemple a été traité sans l'aide de droits exogènes inégaux dans la littérature (voir [Mou03, page 79]), de la manière suivante : les agents correspondent à l'ensemble des individus impliqués dans le partage de la radio (nos clones), l'utilité d'un agent amateur d'une station $i$ étant la fraction $x_i$. Dans ce contexte, la CUF utilitariste classique est difficilement justifiable : elle suggère de ne diffuser que la station qui recueille le plus d'amateurs. La fonction égalitariste est celle qui correspond à notre première solution, et résulte en un partage qui égalise le temps de diffusion de toutes les radios ($x_i = 1/n$). [Mou03] propose un compromis entre ces solutions plutôt extrêmes (soit le groupe le plus nombreux impose son choix pour toute la durée de la diffusion, soit on ne

7. Les droits n'ont en réalité pas «disparu», car ils apparaissent de manière cachée dans les fonctions $u_i(a_i)$. On trouve un exemple analogue dans [Mou88, page 21], traité sans l'aide des droits inégaux.

tient pas du tout compte du nombre d'amateurs de chaque station), en utilisant la CUF de Nash, qui s'écrit $W(\overrightarrow{u}) = \prod u_i$. Maximiser cette fonction revient, dans le problème de la radio, à résoudre le problème d'optimisation sous contrainte suivant : $\max_{\overrightarrow{x}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{e_i}$, avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Ce problème d'optimisation classique admet comme solution : $x_i = e_i/n$. Cette solution alloue un temps de diffusion proportionnel au nombre d'amateurs d'une station, ce qui correspond exactement à notre seconde solution (égalitarisme, division). Notons que cette solution correspond au principe de la «dictature aléatoire» : chaque agent impose son point de vue aux autres pendant une fraction $1/m$ du temps total.

## 7 CUF de compromis et droits inégaux

L'utilitarisme classique et l'égalitarisme sont deux visions extrêmes de la décision collective[8]. Il existe cependant des compromis entre ces deux extrêmes, par exemple sous la forme de fonctions paramétrées (voir [Mar99]). Le but de cette section est de montrer comment le principe de duplication peut se marier avec l'idée de compromis, par exemple avec la famille de CUF introduite par Atkinson (cité par [ASS02, chapitre 12] ; voir aussi [Mou88, chapitre 2.6]), définie pour tout $p \leq 1$ (nous supposerons que $u_i > 0$) :

$$W_p^{(n)}(\overrightarrow{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{1/n}, & p = 0 \end{cases}$$

Lorsque $p = 1$, $W_1^{(n)}$ est la moyenne (utilitarisme classique) et $W_p^{(n)}$ tend vers le $\min$ lorsque $p$ tend vers $-\infty$[9], et $W_0^{(n)}$ est la fonction de Nash.

8. Par exemple l'égalitariste pur préfère $\langle 10, 10, 10\rangle$ à $\langle 9, 100, 100\rangle$. L'utilitariste inconditionnel préfère $\langle 1, 100, 100\rangle$ à $\langle 66, 66, 67\rangle$ et même à $\langle 2, 99, 99\rangle$.

9. Strictement parlant, $W_p^{(n)}$ possède l'avantage de représenter l'ordre leximin lorsque $p \to -\infty$.

En appliquant le principe de duplication, on trouve, pour le cas $u_i \div e_i = u_i/e_i$ :

$$W_{p,\overrightarrow{e},div}^{(n)}(\overrightarrow{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} e_i^{1-p} \cdot u_i^p\right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{e_i}\right)^{e_i}\right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

et, pour le cas $u_i \div e_i = u_i$ :

$$W_{p,\overrightarrow{e},rep}^{(n)}(\overrightarrow{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot u_i^p\right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left(\prod_{i=1}^{n} u_i^{e_i}\right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

On pourra trouver des formes plus agréables aux fonctions ci-dessus, en utilisant la propriété selon laquelle les CUF sont significatives à une transformation monotone croissante près.

Il est intéressant de caractériser ces CUF à l'aide des propriétés introduites ci-avant. Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3** *Les CUF $W_{p,\overrightarrow{e},div}$ et $W_{p,\overrightarrow{e},rep}$ vérifient les propriétés suivantes pour tout $p$ : unanimité, anonymat généralisé, IUA généralisée et conformité. $W_{p,\overrightarrow{e},rep}$ vérifie de plus l'IDCD pour tout $p$, mais $W_{p,\overrightarrow{e},div}$ ne vérifie cette même propriété que pour $p < 1$.*

Il existe d'autres familles de fonctions de compromis entre la somme et le min, à l'instar de la famille des OWA [Yag88], qu'il est possible d'utiliser comme base pour obtenir une autre généralisation des CUF à droits inégaux. Noter que les intégrales de Choquet ne conviendraient pas ici, car elles sont conçues pour prendre en compte les *interactions* entre agents (ou critères), et ne sont donc pas compatibles avec la propriété d'anonymat.

Une question naturelle reste encore en suspens : comment généraliser la fonction de répartition, afin d'établir des compromis naturels entre division et réplication [10] ?

## 8 Droits inégaux ordinaux

Si, dans de nombreux problèmes tels que ceux présentés ici, le vecteur de droits inégaux apparaît de manière naturelle, en revanche, dans certains autres problèmes, il peut s'avérer difficile d'exprimer ces différences d'avantage sous forme numérique. Ainsi par exemple, dans un comité, l'avis d'un agent ayant plus d'expérience ou plus d'ancienneté comptera plus que l'avis d'un autre agent, sans qu'il ne soit vraiment possible à première vue de quantifier cet avantage. Dans ce contexte, une éventuelle transcription numérique de l'ordre de priorités pose autant de problèmes philosophiques que la transcription numérique d'un ordre de préférences : quel sens donner à d'éventuels droits numériques, comment attribuer ces droits aux agents. . .Nous présentons ici brièvement quelques pistes de réflexion sur la prise en compte de droits exogènes sous la forme d'un ordre de priorité entre les agents, dans un contexte utilitariste. Nous considérerons dans toute la suite qu'un ordre de priorité est un préordre total sur les agents : tous les agents sont ordonnés, mais on admet que plusieurs agents se situent au même niveau de priorité.

S'il paraît difficile d'utiliser un ordre de priorité pour prendre une décision collective en une seule phase, comme avec une CUF à droits inégaux, en revanche, on peut envisager des méthodes de prise de décision à plusieurs phases induites par l'ordre de priorité. Deux méthodes sont intuitives : dans la première méthode (forte), l'ordre de priorité est prédominant dans le processus de décision collective ; dans la seconde (faible), il sert juste à départager les *ex-aequo*.

Pour la méthode forte, la prise de décision se déroule selon les phases suivantes :
- On limite le problème aux agents les plus prioritaires, et on cherche toutes les décisions maximisant la CUF.
- Si cet ensemble ne contient qu'un élément, c'est la décision optimale (on ne tient pas compte des autres agents). Sinon, on restreint l'ensemble des décisions admissibles à cet ensemble de décisions optimales pour la première phase, et on maximise à nouveau la CUF, en incluant cette fois-ci les agents situés au deuxième niveau de priorité.
- On raffine la sélection à chaque étape en incluant les agents de priorité directement inférieure, jusqu'à obtenir une décision unique.

Pour la méthode faible, tous les agents comptent dès la première phase :
- On cherche toutes les décisions maximisant la CUF avec tous les agents.
- S'il reste des *ex-aequo*, on enlève les agents les moins prioritaires, on limite l'ensemble des décisions admissibles à l'ensemble des décisions optimales précédentes et on cherche à maximiser la CUF.
- On raffine la sélection à chaque étape en excluant les agents de priorité la plus basse, jusqu'à obtenir une décision unique.

La première méthode est pertinente uniquement dans les problèmes pour lesquels les premières phases laissent de nombreuses décisions *ex-aequo*. L'exemple typique de tels problèmes est un problème de partage dans lequel les agents ne convoitent qu'une petite partie de la ressource : les agents les plus prioritaires s'étant partagés la partie de la ressource qu'ils convoitent, le reste de la ressource leur est indifférent. La deuxième méthode est pertinente dans les problèmes pour lesquels les préférences des agents sont très différentes, et pour lesquels il existe un certain nombre de décisions optimales

10. Dans l'exemple des infrastructures collectives (théâtres), nous avons choisi la réplication comme fonction de répartition : nous supposons que le fait d'exister apporte une utilité non divisée à chaque habitant. Si maintenant le théâtre est trop petit, la fonction de répartition tend vers la division (tout le monde ne peut en profiter en même temps), avec des compromis possibles.

qu'il est impossible de départager et qui avantagent toutes des agents différents.

On peut envisager des méthodes intermédiaires de décision entre ces deux procédés extrêmes. Nous proposons par exemple de limiter l'ensemble des décisions admissibles lors des premières phases, afin de permettre aux agents les moins prioritaires d'influer plus sur le processus de décision. Dans le cadre du partage de ressource commune, cela peut se traduire par la limitation de la quantité de ressource disponible pour le partage lors de la première phase, et l'augmentation progressive de cette limite jusqu'à partager toute la ressource lors de la dernière phase.

## 9 Conclusion

Cet article constitue le point de départ d'une réflexion générale sur la prise en compte de droits exogènes inégaux. Nous avons proposé un cadre général pour bâtir des CUF prenant en compte des droits exogènes inégaux. De plus, nous avons introduit un certain nombre de CUF à droits inégaux, et caractérisé ces fonctions à l'aide de propriétés nouvellement introduites. Nous avons en outre proposé quelques pistes pour la prise en compte de droits inégaux sous forme d'ordres de priorité. Il reste de nombreux travaux à accomplir, notemment en ce qui concerne la recherche de propriétés des CUF à droits inégaux, du lien entre ces propriétés, et de la caractérisation des CUF à l'aide de ces propriétés. En outre, les pistes introduites dans le domaine des droits inégaux ordinaux restent entièrement à explorer.

**Remerciements** Nous remercions Jérôme Lang pour nos discussions communes stimulantes autour des problèmes de partage.

## Références

[ASS02] K.J. Arrow, A.K. Sen, and K. Suzumura, editors. *Handbook of Social Choice and Welfare*, volume 1. Elsevier, 2002.

[BT96] S. J. Brams and A. D. Taylor. *Fair Division : From Cake-cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, 1996.

[BY01] M. L. Balinsky and H. Peyton Young. *Fair representation : meeting the ideal of one man one vote*. Brookings Institution Press, second edition, 2001.

[FM98] D. S. Felsenthal and M. Machover. *The Measurement of Voting Power : Theory and Practice, Problems and Paradoxes*. Edward Elgar, 1998.

[LVB99] M. Lemaître, Gérard Verfaillie, and Nicolas Bataille. Exploiting a Common Property Resource under a Fairness Constraint : a Case Study. In *Proc. of IJCAI-99*, pages 206–211, Stockholm, Sweden, 1999.

[Mar99] J.-L. Marichal. *Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid*. PhD thesis, Faculté des Sciences de Liège, 1999.

[Mou88] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.

[Mou03] H. Moulin. *Fair division and collective welfare*. MIT Press, 2003.

[Raw71] J. Rawls. *A Theory of justice*. Belknap, 1971.

[Sen95] A. Sen. *Inequality Reexamined*. Oxford University Press, 1995.

[Yag88] R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18 :183–190, 1988.

[You94] H. P. Young. *Equity in Theory and Practice*. Princeton University Press, 1994.