Mon partage sera-t-il conflictuel ? Une échelle de propriétés pour la caractérisation d'instances de partage de biens indivisibles

S. Bouveret⋆ M. Lemaître
sylvain.bouveret@imag.fr michel.lemaitre.31@gmail.com

⋆LIG – Grenoble INP, 681 rue de la Passerelle, BP72, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex.

Résumé :
À partir d'un modèle simple de problème de partage de biens indivisibles avec préférences additives, nous montrons comment une série de cinq propriétés pouvant définir l'équité d'un partage sont connectées entre elles, formant une échelle d'exigences croissantes. Cette échelle permet de caractériser la conflictualité d'une instance de problème de partage : le degré de non-conflit se reflète dans la plus exigeante des propriétés que peut satisfaire un partage de cette instance. Des résultats de complexité théorique concernant ces propriétés sont établis. Le modèle est élargi vers des préférences k-additives.

Mots-clés : Partage équitable de biens indivisibles, juste part, absence d'envie, équilibre compétitif à revenus égaux, préférences additives, k-additives.

Abstract:
In this paper we investigate five different equity properties in a simple model of fair resource allocation of indivisible goods based on additive preferences. We show how these properties are connected to each other, forming an ordered scale that can be used to characterize how conflicting the agents' preferences are : the less these preferences are conflicting, the more exigent property this instance will be able to satisfy, and the easier and more satisfactory the allocation will be. We introduce some theoretical computational properties, and we further investigate a slightly richer model with k-additive preferences.

Keywords: Fair division of indivisible goods, fair share, envy-freeness, CEEI, additive and k-additive preferences

1 Introduction

Le partage équitable de ressources est une forme importante d'interaction entre agents. La variété des problèmes de partage équitable dans le monde réel témoigne de la richesse et de l'importance de ce problème, allant de l'allocation de ressources spatiales [13, 2] à l'attribution de travaux à des employés ou à des élèves, d'articles à des relecteurs, de places de cours à des étudiants [6], en passant par la répartition de droits d'émission de polluants.

Si l'étude des problèmes de partage a longtemps été l'apanage des économistes, qui se sont principalement focalisés (à quelques exceptions près [5, 12, 4, entre autres]), sur le partage de ressources *continues*, les chercheurs en informatique et intelligence artificielle se sont réappropriés depuis quelques années la problématique du partage équitable, principalement concernant des objets indivisibles (des créneaux de cours, des bâtiments, des œuvres d'art...), qui revêtent des aspects fortement combinatoires. Notre travail se situe dans la lignée de ces travaux sur le partage de biens indivisibles. Nous adoptons de plus ici un point de vue *centralisé*, c'est-à-dire que les agents doivent communiquer leurs préférences à une entité centrale chargée d'attribuer les objets aux agents. D'autres approches sont possibles, comme par exemple la négociation entre les agents [8, par exemple].

Dans une procédure centralisée, les agents doivent communiquer et donc décrire explicitement leurs préférences. Deux cadres sont appropriés pour cela. D'une part l'expression ordinale des préférences (sous forme d'un ordre ou d'un préordre), et d'autre part l'expression numérique (sous forme de fonctions d'utilité). Cet article s'appuie – par commodité – sur ce second cadre, mais la plupart des résultats qu'il contient pourraient se transposer dans le premier.

Un point crucial dans tout problème de partage concerne la façon dont l'équité du partage est définie et mesurée. Là encore deux grandes voies sont possibles. Une première voie consiste à définir une fonction d'utilité collective qui, face à un partage donné, va agréger la satisfaction individuelle des agents en une satisfaction collective, et si elle est bien choisie, va également refléter l'équité du partage. On recherchera alors un partage maximisant cette fonction d'utilité collective. Une seconde voie consiste à définir logiquement (par un critère booléen, une propriété) ce qui est jugé comme équitable. C'est principalement cette seconde voie qui est explorée dans cet article.

La littérature décrit de nombreuses propriétés logiques caractérisant l'équité d'un partage. Nous reprendrons : la juste part max-min, la juste part proportionnelle, l'absence d'envie et l'équilibre compétitif à revenus égaux, que nous adaptons à notre modèle, et auxquelles nous ajoutons une cinquième propriété originale : la juste part min-max. Ces propriétés ont ceci de remarquable, outre qu'elles ont toutes une interprétation très naturelle : elles ne nécessitent pas d'échelle commune d'utilité des agents.

Certaines instances de problème de partage d'objets indivisibles sont plus conflictuelles que d'autres : lorsque les objets sont nombreux et que les protagonistes désirent plutôt des objets différents, un partage équilibré et satisfaisant tous les protagonistes pourra être trouvé ; à l'inverse, lorsque les agents ont des préférences proches (ils désirent tous plus ou moins les mêmes objets), ou lorsque les objets sont peu nombreux, le partage est source de conflits. L'apport essentiel et original de cet article est le suivant. À partir d'un modèle simple de problème de partage de biens indivisibles, nous montrons comment une série de cinq propriétés pouvant définir l'équité d'un partage sont connectées entre elles, formant une échelle d'exigences croissantes. Un partage sera d'autant plus harmonieux (sans conflit) que la propriété la plus exigeante sera satisfaite. Cette échelle peut servir à caractériser la non-conflictualité d'une instance de problème de partage : celle-ci se reflète dans la plus exigeante des propriétés que peut satisfaire un partage de cette instance.

L'article se présente ainsi. La section 2 décrit notre modèle : le problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. L'échelle des cinq propriétés caractérisant l'équité d'un partage fait l'objet de la section 3, et présente des résultats de complexité théorique associés. Nous revenons en section 4 sur l'approche par fonction d'utilité collective (min en l'occurrence) pour la connecter à l'échelle des propriétés. Dans la section 5 nous examinons ce que deviennent nos propriétés dans quelques cas particuliers. Avec l'élargissement du modèle à des préférences k-additives, la section 6 présente un paysage différent, avec ses propres résultats de complexité. Enfin la section 7 conclue et donne quelques perspectives à ce travail.

2 Modèle

Le problème de partage de biens indivisibles consiste à allouer un ensemble fini d'*objets* $\mathcal{O} = \{1, \dots, M\}$ à un ensemble fini d'*agents* $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$. Une telle allocation, appelée *partage*, est représentée par un vecteur $\overrightarrow{\pi} = \langle \pi_1, \dots, \pi_N \rangle$, où $\pi_i \subseteq \mathcal{O}$ représente la *part* de l'agent i. Plus généralement, nous appellerons *part* tout sous-ensemble π de $\mathcal{O}$. Un partage $\overrightarrow{\pi}$ est dit *admissible* si et seulement s'il satisfait les deux conditions suivantes : (i) $i \neq j \Rightarrow \pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ (un objet n'est attribué qu'à un seul agent) et (ii) $\cup_{i \in \mathcal{A}} \pi_i = \mathcal{O}$ (tous les objets sont attribués). Nous noterons $\mathcal{F}$ l'ensemble des partages admissibles pour un ensemble d'agents $\mathcal{A}$ et d'objets $\mathcal{O}$ ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$ sont omis dans la notation car le contexte est clair), et tous les partages considérés dans cet article sont implicitement admissibles.

La construction d'un bon partage s'appuie nécessairement sur la connaissance des préférences des agents sur les objets. Nous ferons deux hypothèses classiques. Tout d'abord, nous considérons que les préférences des agents s'expriment numériquement par une *fonction d'utilité* $u_i : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^+$ donnant pour chaque agent i la satisfaction $u_i(\pi)$ qu'il obtient si on lui attribue la part π : c'est le modèle de l'utilitarisme [15]. Nous considérons de plus, sauf section 6, que les préférences des agents sont *additives*, autrement dit l'utilité d'un agent i pour une part π est ainsi définie :

$$u_i(\pi) \stackrel{def}{=} \sum_{l \in \pi} w(i, l), \qquad (1)$$

où $w(i, l)$ représente le poids donné par l'agent i à l'objet l. Cette hypothèse, bien que restrictive, est faite par de nombreux auteurs [14, 1, par exemple] et fournit un bon compromis entre expressivité des préférences et concision.

Les données du modèle sont ainsi résumées :

Définition 1. *Une* instance de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives *est définie par :*
- *un ensemble* $\mathcal{A} = \{1, ...i, ...N\}$ *de* N agents*,*
- *un ensemble* $\mathcal{O} = \{1, ...l, ...M\}$ *de* M objets*,*
- *une fonction* $w : \mathcal{A} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}^+$*, où* $w(i, l)$ *est le poids donné par l'agent* i *à l'objet* l*.*

Les indices i et j désigneront des agents, et l des objets. Nous représenterons les fonctions de poids w des instances introduites dans les exemples par des matrices W de taille $N \times M$, l'élément ligne i colonne l représentant le poids $w(i, l)$. Enfin, nous désignerons par $\mathcal{I}$ l'ensemble des instances de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives.

Les notions basiques de complexité des problèmes [18] sont supposées connues : P et NP font référence aux classes habituelles ; Σ_2^{P} est la classe des problèmes pouvant être résolus en temps en par une machine de Turing non déterministe augmentée d'un oracle NP.

3 Cinq propriétés d'équité

Dans ce type de problème multi-agent et avant même de parler d'équité, la seule notion d'optimalité indiscutable est celle bien connue de Pareto-optimalité, rappelée ici.

Définition 2. *Soit une instance d'un problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. Le partage $\overrightarrow{\pi}$* domine *le partage $\overrightarrow{\pi}'$ si et seulement si $u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi'_i)$ pour tout i, avec au moins une inégalité stricte. Un* partage Pareto-efficace *ou* Pareto-optimal *est un partage qui n'est dominé par aucun autre.*

Si ce critère se focalise sur l'« efficacité » du partage (dans le sens où il traduit l'idée que la ressource à partager ne doit pas être gaspillée), il ne dit rien sur l'exigence d'équité entre les agents. Deux approches sont possibles pour formaliser l'équité d'un partage.
(1) Si les préférences sont numériques, on peut utiliser une *fonction d'utilité collective* (ou un *ordre de bien être social*) permettant d'agréger les préférences individuelles en une préférence collective, et chercher un partage qui maximise cette fonction. Si celle-ci est bien choisie, elle peut véhiculer une certaine notion d'équité (comme par exemple la fonction égalitariste $\min$ dont nous reparlerons en section 4).
(2) On peut choisir un certain critère (ou propriété) d'équité et chercher un partage qui le vérifie, s'il en existe un. Les deux critères les plus connus dans la littérature sont l'absence d'envie [10] et la juste part proportionnelle [21].

Dans cet article, nous adoptons le second point de vue. Nous montrerons comment cinq propriétés d'équité forment une échelle d'exigences croissantes permettant d'une part de caractériser le degré d'équité d'un partage donné, et d'autre part, en amont, d'évaluer le degré de conflictualité d'une instance de problème de partage. Nous exposerons ces cinq propriétés par ordre croissant d'exigences, dans le cadre particulier du partage de biens indivisibles avec préférences additives. Pour chacune de ces propriétés, nous noterons $\overrightarrow{\pi} \models \mathcal{P}$ si le partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, et $\mathcal{I}_{|\mathcal{P}}$ l'ensemble des instances telles qu'il existe au moins un partage vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.

3.1 Juste part max-min

L'une des propriétés classiques d'équité dans les problèmes de partage est celle de juste part proportionnelle, que nous détaillerons dans la section 3.2. Cette propriété, introduite initialement par Steinhaus [21] dans le cadre des problèmes de partage continus, exige d'un partage qu'il attribue à chaque agent le $N^{\text{ème}}$ de l'utilité totale qu'il aurait retiré de la ressource s'il avait été seul. Partant du constat que dans le cadre des problèmes de partage de biens indivisibles, cette propriété était trop exigeante et donc souvent impossible à assurer, un récent article de Budish [6] en a défini une version moins contraignante, spécifiquement dédiée au cadre des biens indivisibles : la juste part max-min.

Définition 3. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$ une instance d'un problème de partage de biens indivisibles à préférences additives.* La juste part max-min *(max-min fair share) de l'agent i pour l'instance considérée est*

$$u_i^{\mathrm{MFS}} \overset{\text{def}}{=} \max_{\overrightarrow{\pi} \in \mathcal{F}} \min_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j)$$

On dit que le partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifie la propriété de juste part max-min*, lorsque $u_i^{\mathrm{MFS}} \leq u_i(\pi_i)$ pour tout i (i.e. tout agent obtient au moins sa juste part max-min dans $\overrightarrow{\pi}$).*

Exemple 1. *Soit l'instance à 2 agents et 4 objets définie par la matrice de poids suivante :*

$$W = \begin{pmatrix} *7 & 2 & 6 & *10 \\ 4 & *7 & *7 & 7 \end{pmatrix}$$

On a $u_1^{\mathrm{MFS}} = 12$ (avec la part {2,4}) et $u_2^{\mathrm{PFS}} = 11$ (avec la part {1,2}. Le partage $\langle\{1,4\},\{2,3\}\rangle$ marqué par des étoiles vérifie la propriété de juste part max-min.

La juste part max-min d'un agent est l'utilité maximale que l'agent peut retirer d'un partage si tous les agents ont les mêmes préférences que lui, quand il obtient systématiquement la part la plus défavorable pour lui (la meilleure des plus mauvaises parts). On peut voir que dans le cas limite où le nombre d'objets tend vers l'infini, et où l'on tend donc vers le cadre continu, u_i^{MFS} tend vers le $N^{\text{ème}}$ de l'utilité totale que i aurait retiré de la ressource s'il avait été seul, et donc la définition de la juste part max-min se rapproche de celle de la juste part proportionnelle.

La juste part max-min d'un agent représente aussi l'utilité que cet agent est en droit d'exiger selon l'argument suivant : si tous les autres agents ont les mêmes préférences que moi (donc sur la base d'un pied d'égalité), il existe un partage qui me donne cette utilité, et qui donne au moins cette utilité aux autres, il n'y a donc pas de raison que j'obtienne moins. La juste part max-min est aussi le maximum de l'utilité que peut retirer un agent dans un jeu-partage du type « je coupe et je choisirai en dernier » : on imagine que l'agent effectue le partage et laisse aux autres agents choisir leur part, se servant en dernier. Avec cette procédure, la juste part max-min est la plus grande utilité dont il peut s'assurer.

Notons que le calcul même de la juste part max-min u_i^{MFS} pour un agent i donné est complexe. Plus précisément, le problème de décision défini ci-dessous est NP-complet :

Problème 1 [CALCUL-MFS]	
Entrée :	$(A, \mathcal{O}, w)$ une instance de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives, i un agent, K un entier.
Question :	A-t-on $u_i^{\mathrm{MFS}} \geq K$?

Proposition 1. *Le problème* [CALCUL-MFS] *est NP-complet, pour tout* $N \geq 2$.

Démonstration. L'appartenance à NP est immédiate. Pour ce qui est de la NP-difficulté, elle peut être démontrée par réduction depuis le problème de partition qui s'énonce comme suit :

Problème 2 [PARTITION]	
Entrée :	Un ensemble $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et une fonction $s : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{x_i \in \mathcal{X}} s(x_i) = 2L$.
Question :	Existe-t-il une partition $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ de $\mathcal{X}$ telle que $\sum_{x_i \in \mathcal{X}_1} s(x_i) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}_2} s(x_i) = L$?

Pour toute instance du problème [PARTITION], il suffit de créer une instance du problème [CALCUL-MFS] à deux agents et n objets $\{1, \ldots, n\}$, les préférences des agents étant identiques et définies par les poids $w(1, l) = w(2, l) = s(x_l)$, et l'entier K étant égal à L. $\square$

Même si le calcul de la juste part max-min pour un agent donné est complexe, il n'est pas dit que le problème de décision consistant à déterminer, pour une instance donnée, s'il existe un partage vérifiant la propriété de juste part max-min le soit également. De fait, nous conjecturons même qu'un tel partage existe toujours dans notre modèle additif :

Conjecture 1. *Toute instance* $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$ *de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives admet au moins un partage vérifiant la propriété de juste part max-min.*

Autrement dit, nous conjecturons que $\mathcal{I}_{|\mathrm{MFS}} = \mathcal{I}$. Nous étudierons dans la section 5 un certain nombre de cas particuliers pour lesquels cette conjecture est prouvée.

3.2 Juste part proportionnelle

Le concept de juste part proportionnelle, déjà évoqué plus haut, a été à l'origine défini non sur les utilités mais sur les ressources elles-mêmes. De nombreux auteurs en ont donné cependant une interprétation naturelle utilitariste, comme celle qui suit, adaptée à notre modèle.

Définition 4. *Soit une instance du problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. La* juste part proportionnelle *(proportional fair share) de l'agent* i *pour l'instance considérée est*

$$u_i^{\mathrm{PFS}} \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} u_i(\mathcal{O}) = \frac{1}{N} \sum_{l \in \mathcal{O}} w(i, l).$$

On dit que le partage $\overrightarrow{\pi}$ *vérifie la* propriété de juste part proportionnelle*, lorsque* $u_i^{\mathrm{PFS}} \leq u_i(\pi_i)$ *pour tout* i *(i.e. tout agent obtient au moins sa juste part proportionnelle dans* $\overrightarrow{\pi}$*).*

La juste part proportionnelle d'un agent représente l'utilité maximale qu'il retirerait d'un partage fictif parfaitement équitable si tous les agents avaient les mêmes préférences que lui (c'est-à-dire $\forall i, j, l : w(j, l) = w(i, l)$), donc sur la base d'un même pied d'égalité, et si les objets étaient divisibles (avec utilité proportionnelle). En outre, dans le partage fictif obtenu en divisant chaque objet en N parties, chacune allouée à un agent différent, chacun aurait exactement sa juste part proportionnelle.

Cette propriété est plus exigeante, on s'en doute, que celle de juste part max-min :

Proposition 2. *Soit* $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$ *une instance de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. On a* $u_i^{\mathrm{MFS}} \leq u_i^{\mathrm{PFS}}$, $\forall i \in \mathcal{A}$. *En conséquence, pour tout* $\overrightarrow{\pi}$, *on a* $\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{PFS} \implies \overrightarrow{\pi} \models \mathrm{MFS}$, *et donc* $\mathcal{I}_{|\mathrm{PFS}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{MFS}}$.

Démonstration. Soient $\overrightarrow{\pi}$ un partage et i un agent. Nous avons $\sum_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j) = u_i(\mathcal{O})$. Le minimum d'un ensemble de nombres étant inférieur à leur moyenne, nous avons

$$\min_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j) \leq \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j) = \frac{1}{N} u_i(\mathcal{O}) = u_i^{\mathrm{PFS}}$$

En passant cette dernière inégalité au $\max$ sur les partages $\overrightarrow{\pi}$, nous obtenons directement l'inégalité $u_i^{\mathrm{MFS}} \leq u_i^{\mathrm{PFS}}$ recherchée. □

L'inclusion de la proposition 2 est stricte : pour le voir on peut considérer toute instance à 2 agents et un seul objet, pour laquelle tout partage vérifie la propriété de juste part max-min mais pas celle de juste part proportionnelle.

Contrairement au cas de la juste part max-min, calculer la juste part proportionnelle pour un agent donné est immédiat. En revanche, il n'existe pas toujours, pour une instance donnée, de partage satisfaisant la propriété de juste part proportionnelle, et le problème de déterminer s'il en existe un (problème que l'on nommera [EXISTENCE-PFS]) est difficile :

Proposition 3. *Le problème* [EXISTENCE-PFS] *est* NP*-complet.*

Une réduction similaire à celle de la preuve de la proposition 1 permet de montrer le résultat.

3.3 Juste part min-max

La propriété de juste part min-max que nous introduisons maintenant est à notre connaissance originale. Elle peut être vue comme la version symétrique de la propriété de juste part max-min définie ci-avant.

Définition 5. *Soit une instance d'un problème de partage de biens indivisibles à préférences additives.* La juste part min-max *(min-max fair share) de l'agent i pour l'instance considérée est*

$$u_i^{\mathrm{mFS}} \stackrel{def}{=} \min_{\overrightarrow{\pi} \in \mathcal{F}} \max_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j)$$

On dit que le partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifie la propriété de juste part min-max*, lorsque $u_i^{\mathrm{mFS}} \leq u_i(\pi_i)$ pour tout i (i.e. tout agent obtient au moins sa juste part min-max dans $\overrightarrow{\pi}$).*

La juste part min-max d'un agent est l'utilité minimale que l'agent peut retirer d'un partage si tous les agents ont les mêmes préférences que lui, quand il obtient systématiquement la meilleure part pour lui (la moins bonne des meilleures parts). C'est aussi l'utilité minimale que peut retirer un agent dans un partage du type « vous coupez et je choisirai en premier ». On peut montrer de manière similaire à la proposition 2 le résultat suivant :

Proposition 4. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$ une instance de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. On a $u_i^{\mathrm{PFS}} \leq u_i^{\mathrm{mFS}}$, $\forall i \in \mathcal{A}$. En conséquence, pour tout $\overrightarrow{\pi}$ on a $\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{mFS} \implies \overrightarrow{\pi} \models \mathrm{PFS}$ et donc $\mathcal{I}_{|\mathrm{mFS}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{PFS}}$.*

Cette inclusion est stricte, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2. *Soit l'instance à 3 agents et 3 objets définie par la matrice de poids suivante :*

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 2 & *2 \\ 3 & *2 & 1 \\ *3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De manière évidente $u_i^{\mathrm{PFS}} = 2$ pour chacun des agents, et donc le partage marqué par des étoiles donne à chacun sa juste part proportionnelle. En revanche, aucun partage ne peut donner à chaque agent sa juste part min-max, qui est de 2 pour l'agent 1 et 3 pour les deux autres.

Tout comme le calcul de la juste part max-min pour un agent donné, le calcul de sa juste part min-max est difficile, pour des raisons similaires. Plus précisément, si nous nommons [CALCUL-MFS] l'équivalent du problème de décision 1 pour la juste part min-max, nous avons la proposition suivante :

Proposition 5. *Le problème* [CALCUL-MFS] *est* coNP*-complet.*

Le problème devient coNP-complet parce que la juste part min-max est définie comme une minimisation, et que nous cherchons, tout comme pour la juste part max-min, à déterminer si la juste part min-max d'un agent est supérieure à un certain seuil. La démonstration est omise, car encore très similaire à celle de la proposition 1.

Bien entendu, pour une instance donnée, il n'existe pas toujours de partage satisfaisant la juste part min-max. Le problème de déterminer s'il en existe un est probablement difficile, mais sa complexité exacte reste indéterminée. [1]

1. Tout ce que nous pouvons dire est que ce problème est dans Σ_2^{P}.

3.4 Absence d'envie

La propriété d'absence d'envie [10] est sans doute la plus classique des propriétés d'équité.

Définition 6. *Soit une instance d'un problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. On dit que le partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifie la* propriété d'absence d'envie *(ou est sans envie – envy-free), lorsque $u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi_j)$, $\forall (i,j) \in \mathcal{A}^2$ (en d'autres termes, aucun agent ne préfère strictement la part d'un autre).*

Proposition 6. *Tout partage sans envie assure à chaque agent sa part min-max. En d'autres termes, $\forall \overrightarrow{\pi} : \overrightarrow{\pi} \models \text{EF} \implies \overrightarrow{\pi} \models \text{mFS}$, et donc en conséquence, $\mathcal{I}_{|\text{EF}} \subset \mathcal{I}_{|\text{mFS}}$.*

Démonstration. Dans un partage sans envie, chaque agent obtient une part d'utilité maximale pour lui dans ce partage, donc d'utilité supérieure ou égale à sa part min-max. □

Encore une fois, cette inclusion est stricte : un agent pourrait très bien obtenir sa juste part min-max sans pour autant qu'il ait, dans le partage courant, la part qu'il préfère. Considérons l'exemple suivant :

Exemple 3. *Soit l'instance à 3 agents et 4 objets définie par la matrice de poids suivante :*

$$W = \begin{pmatrix} *10 & 6 & 6 & 1 \\ 10 & *6 & *6 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & *10 \end{pmatrix}$$

On a $u_i^{\text{mFS}} = 10$ pour chaque agent, donc le partage étoilé donne à chacun sa juste part min-max. Supposons qu'il existe un partage $\overrightarrow{\pi}$ sans envie. $\overrightarrow{\pi}$ devrait donner à chaque agent 1 et 2 la même utilité car ils ont les mêmes préférences : soit $\overrightarrow{\pi}$ ne donne rien à 1 et 2, soit il leur donne 6 à chacun. Dans les deux cas, ils envient l'agent 3. Il n'existe donc aucun partage sans envie.

Étant donné un partage, on peut bien entendu vérifier en temps quadratique s'il est sans envie. En revanche, le problème consistant à déterminer, pour une instance donnée, s'il existe un partage sans envie est connu pour être NP-complet [2] [14]. Si l'on ajoute en plus la propriété de Pareto-optimalité, ce problème d'existence devient Σ_2^{P}-complet [9].

2. Ce résultat ne tient que si l'on exige la complétude du partage.

3.5 Équilibre compétitif à revenus égaux

La dernière propriété introduite est une notion très classique en microéconomie [16], mais n'a quasiment jamais été étudiée à notre connaissance en informatique [3]. L'idée est de concevoir un partage comme la recherche d'un équilibre entre une offre (l'ensemble des biens, dotés chacun d'un « prix public ») et une demande (le désir des agents, dotés chacun d'un budget). Un équilibre compétitif est atteint lorsque l'offre égale la demande. L'argument d'équité est imparable : prix et budgets sont les mêmes pour tous. Il existe de nombreuses variantes de cette notion ; la définition qui suit est adaptée de Budish [6].

Définition 7. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$ une instance d'un problème de partage de biens indivisibles à préférences additives, $\overrightarrow{\pi}$ un partage, et $\overrightarrow{p} \in [0,1]^M$ un vecteur de prix. On dit que le couple $(\overrightarrow{\pi}, \overrightarrow{p})$ forme un* équilibre compétitif à revenus égaux *(competitive equilibrium from equal incomes, CEEI), si pour tout agent i,*

$$\pi_i \in \text{argmax}_{\pi \subseteq \mathcal{O}} \{u_i(\pi) : \sum_{l \in \pi} p_l \leq 1\}.$$

En d'autres termes, π_i est l'une des parts maximales que i peut s'offrir avec un budget de 1, sachant que le prix de chaque objet l est p_l.
On dira que le partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifie la propriété CEEI s'il existe un vecteur $\overrightarrow{p}$ tel que $(\overrightarrow{\pi}, \overrightarrow{p})$ forme un équilibre compétitif à revenus égaux.

Exemple 4. *Soit l'instance à 2 agents et 4 objets définie par la matrice de poids suivante :*

$$W = \begin{pmatrix} *7 & 2 & 6 & *10 \\ 7 & *6 & *8 & 4 \end{pmatrix}$$

Le partage étoilé, associé au vecteur de prix $(0.8, 0.2, 0.8, 0.2)$ forme un équilibre CEEI.

La proposition suivante est vraie dans de nombreux modèles de partage « continus » (biens divisibles, compensations monétaires). Voici la version pour notre modèle de biens indivisibles.

Proposition 7. *Tout partage CEEI est sans envie. Autrement dit, $\forall \overrightarrow{\pi} : \overrightarrow{\pi} \models \text{CEEI} \implies \overrightarrow{\pi} \models \text{EF}$, et donc en conséquence, $\mathcal{I}_{|\text{CEEI}} \subset \mathcal{I}_{|\text{EF}}$.*

Démonstration. Soit $\overrightarrow{\pi}$ un partage CEEI, et supposons que $u_i(\pi_j) > u_i(\pi_i)$ (l'agent i envie j). Puisque les

3. Une exception remarquable est le travail d'Othman *et al.* [17] sur l'allocation de créneaux de cours à des étudiants.

contraintes budgétaires et les prix sont les mêmes pour chaque agent, π_i n'est pas la part d'utilité maximale achetable par l'agent i, et donc contredit la définition de l'équilibre compétitif. Donc $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie. $\square$

Les partages CEEI ont de plus l'intéressante propriété suivante :

Proposition 8. *Lorsque les préférences des agents sont strictes, tout partage CEEI est Pareto-optimal.*

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{\pi}, \overrightarrow{p})$ un CEEI. Pour toute part π, notons $p(\pi) \stackrel{def}{=} \sum_{l \in \pi} p_l$. Supposons que $\overrightarrow{\pi}$ ne soit pas Pareto-optimal. Alors $\exists \overrightarrow{\pi}'$ tel que $u_i(\pi_i) \leq u_i(\pi'_i)$ pour tout i, avec au moins une inégalité stricte. Puisque $\overrightarrow{\pi}$ est optimal sous le budget $\overrightarrow{p}$, on a $u_i(\pi_i) < u_i(\pi'_i) \Rightarrow p(\pi_i) < p(\pi'_i)$. Mais $u_i(\pi_i) = u_i(\pi'_i) \Rightarrow \pi_i = \pi'_i \Rightarrow p(\pi_i) = p(\pi'_i)$ car les préférences sont strictes. On en conclut que $\sum_{i \in \mathcal{A}} \overrightarrow{p}(\pi_i) < \sum_{i \in \mathcal{A}} \overrightarrow{p}(\pi'_i)$, ce qui est impossible. $\square$

Cette dernière propriété tend à nous faire penser que l'inclusion de la proposition 7 est stricte, par les arguments de complexité suivants. Nous savons que le problème d'existence d'un partage sans envie est NP-complet [14], et que ce problème devient Σ_2^{P}-complet si l'on ajoute l'exigence de Pareto-efficacité du partage [9]. Si $\Sigma_2^{\mathsf{P}} \neq \mathsf{NP}$ (ce qui est communément admis), et si les résultats de complexité précédents tiennent pour des préférences strictes, il existe des instances à préférences strictes possédant des partages sans envie, mais pour lesquels il n'existe aucun partage Pareto-efficace et sans envie. La proposition 8 nous permet de dire que pour ces instances, il n'existe aucun partage CEEI.

Nous n'avons à ce jour pas trouvé d'exemple d'instance possédant un partage sans envie mais pas de partage CEEI, et la grande complexité supposée du problème de recherche d'un partage CEEI semble dissuader une approche systématique similaire à celle associée à la proposition 11 présentée plus loin.

3.6 Une échelle de propriétés

L'unification des propositions 2, 4, 6 et 7 conduit à la chaîne d'implications suivante, pour tout partage $\overrightarrow{\pi}$: $(\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{CEEI}) \Rightarrow (\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{EF}) \Rightarrow (\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{mFS}) \Rightarrow (\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{PFS}) \Rightarrow (\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{MFS})$.

Autrement dit, en terme d'exigence croissante, les propriétés d'un partage se classent ainsi : juste part max-min, juste part proportionnelle, juste part min-max, absence d'envie, équilibre compétitif à revenus égaux (CEEI). Comme le montrent de plus les propositions, ces résultats peuvent s'interpréter également en termes d'instances de problèmes de partage : $\mathcal{I}_{|\mathrm{CEEI}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{EF}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{mFS}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{PFS}} \subset \mathcal{I}_{|\mathrm{MFS}} (= \mathcal{I}?)$, toutes ces inclusions étant strictes. Ces cinq propriétés forment donc une échelle de cinq degrés qui peut servir à caractériser la conflictualité d'une instance de problème de partage de biens indivisibles à préférences additives. Une instance pour laquelle existe un partage CEEI sera jugée peu conflictuelle, alors qu'une instance n'offrant au mieux que des partages possédant la propriété de juste part max-min sera manifestement conflictuelle.

Les propriétés de juste part max-min, juste part proportionnelle et juste part min-max sont de même nature : chacun, face à sa propre part dans un partage, est apte à juger par lui-même si la propriété est satisfaite, sans regarder celles des autres. L'absence d'envie nécessite au contraire la connaissance de la part des autres dans le partage proposé. Enfin, la propriété CEEI est particulière : une fois les prix publics des objets proposés par l'arbitre, ces prix forment un signal à partir duquel chaque agent détermine lui-même sa part (à une équivalence possible près) : une forme de décentralisation.

Les propriétés de juste part max-min, juste part proportionnelle et juste part min-max ont enfin une caractéristique importante vis-à-vis de la Pareto-optimalité, qui découle du fait qu'elles sont définies par des niveaux minimaux d'utilité à garantir, et qui s'énonce comme suit. Un partage possédant une de ces propriétés est Pareto-optimal, ou alors il existe un partage Pareto-optimal de la même instance possédant cette propriété. Ce n'est pas le cas de la propriété d'absence d'envie : on trouve des instances pour lesquelles il existe des partages sans envie sans qu'aucun d'eux ne soit Pareto-optimal.

Au-delà de leurs différences, ces propriétés ont une caractéristique commune très intéressante : elles ne s'appuient pas sur une comparaison interpersonnelle des utilités des agents. Il en découle la proposition suivante :

Proposition 9. *Les propriétés de juste part max-min, proportionnelle, min-max, absence d'envie et CEEI sont conservées par toute dilatation proportionnelle de l'échelle des poids d'un agent, c'est-à-dire lorsque l'on multiplie les poids de tout agent i par une constante K_i.*

En fait, toutes ces propriétés sauf la juste part proportionnelle sont purement ordinales, ce qui les rend d'autant plus intéressantes : elles peuvent être énoncées et leurs relations démontrées de manière semblable dans un modèle dans lequel les préférences des agents sont définies par des préordres complets sur l'ensemble des sous-ensembles d'objets.

4 Le critère égalitariste

Comme nous l'avons signalé au début de la section précédente, l'une des manières classiques d'assurer l'équité entre des agents possédant des préférences numériques est de chercher un partage qui maximise une certaine fonction de ces préférences. La fonction d'utilité collective équitable la plus classique est la fonction égalitariste, qui peut être définie comme suit dans le cadre du partage :

Définition 8. *Soit une instance de problème de partage. La* fonction d'utilité collective égalitariste *est la fonction* $g_e : \overrightarrow{\pi} \mapsto \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$.

On appellera partage *min-optimal* tout partage maximisant cette fonction. Cette fonction d'utilité collective est la traduction formelle de l'éthique égalitariste de Rawls [19], qui préconise de choisir le partage qui maximise l'utilité de l'agent le moins satisfait, afin de garantir à chacun un niveau de satisfaction minimal.

On peut s'interroger sur les liens entre la vision égalitariste et l'approche à base de critères que nous avons introduite à la section précédente, puisqu'après tout, il s'agit dans un cas comme dans l'autre de rechercher l'équité du partage. Il s'avère que certains critères tels que l'absence d'envie sont plutôt antagonistes avec l'égalitarisme, dans le sens où rechercher l'absence d'envie peut conduire à des partages très sous-optimaux au sens de l'égalitarisme. Cette question a été étudiée par Brams et King

En revanche, comme nous allons le voir ici, égalitarisme et juste part proportionnelle sont liés, et il existe une certaine forme de corrélation également entre égalitarisme et juste part max-min.

L'approche égalitariste requérant une comparaison interpersonnelle des utilités, nous supposerons, pour que cette approche ait du sens, que les poids des agents sont normalisés, [4] c'est-à-dire que $\exists K$ tel que $\forall i \in \mathcal{A}$, $\sum_l w(i,l) = K$.

Proposition 10. *S'il existe un partage vérifiant la propriété de juste part proportionnelle, alors tout partage min-optimal la vérifie.*

Démonstration. $\forall i$, $u_i^{\mathrm{PFS}} = K/N$, car les poids sont normalisés. Soit $\overrightarrow{\pi}$ un partage. Si $\overrightarrow{\pi} \models \mathrm{PFS}$, alors $K/N \leq \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$. Soit maintenant $\overrightarrow{\pi}^\star$ un partage min-optimal. Par définition $\min_i u_i(\pi_i) \leq \min_i u_i(\pi_i^\star)$, donc $K/N \leq \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i^\star)$ et donc $K/N \leq u_i(\pi_i^\star)$, $\forall i$. □

De cette proposition on conclut que pour trouver un partage vérifiant la propriété de juste part proportionnelle, il suffit, après avoir normalisé les poids des agents, de rechercher un partage min-optimal. Si ce partage min-optimal vérifie la propriété, alors le problème est résolu, sinon il n'existe aucun partage la vérifiant.

Contre toute attente, le résultat ne tient pas pour la juste part max-min. [5]

Proposition 11. *Même lorsque les poids sont normalisés, il existe des partages min-optimaux* [6] *qui ne vérifient pas la propriété de juste part max-min.*

Démonstration. Voici un contre-exemple, avec 3 agents et 4 objets ($K = 100$) :

$$\begin{pmatrix} 58 & \dagger 15 & \dagger * 19 & 8 \\ \dagger 63 & *5 & 25 & *7 \\ 37 & 10 & *27 & \dagger 26 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow *19/\dagger 34 \\ \rightarrow *12/\dagger 63 \\ \rightarrow *27/\dagger 26 \end{array}$$

Dans cet exemple, la juste part max-min de chaque agent (à droite) ainsi que les parts permettant de l'obtenir sont notés avec des $*$; un partage min-optimal et l'utilité qui en découle pour chaque agent (à droite) est noté avec des †. Le troisième agent n'a pas sa juste part max-min (il a 26 seulement, il attendait au moins 27). □

Il existe bien pour cette instance des partages vérifiant la juste part max-min, par exemple $\langle \{2,4\}, \{1\}, \{3\} \rangle$, mais aucun d'eux n'est min-optimal. En outre, le partage min-optimal n'assure pas la propriété de juste part proportionnelle (26 < 100/3). Donc, d'après la proposition 10, cette instance n'admet aucun partage PFS. Et d'après les propositions 6 et 7, cette instance n'admet aucun partage mFS, EF ou CEEI.

4. Nos cinq propriétés précédentes ne requérant pas de comparaison interpersonnelle des utilités, cette hypothèse était inutile jusqu'ici, même si elle était vérifiée en pratique dans tous les exemples introduits.

5. En fait, il tiendrait si l'on normalisait les poids de manière à égaliser u_i^{MFS} pour tous les agents, et non u_i^{PFS} comme précédemment.

6. Cette proposition fonctionne aussi pour le leximin [20], raffinement du min pour lequel on effectue une comparaison lexicographique sur les vecteurs d'utilité triés, au lieu de se contenter de la comparaison des utilités minimales uniquement.

Enfin, notons qu'en dépit de la proposition 11, il existe une certaine forme de compatibilité entre l'égalitarisme et la juste part max-min, puisqu'en pratique, dans la grand majorité des cas, tout partage min-optimal vérifie la juste part max-min. À titre d'illustration, pour 3 agents et 4 objets, environ une instance générée aléatoirement [7] sur 3500 constitue un contre-exemple similaire à celui de la proposition 11.

5 Cas particuliers

Nous examinons dans cette section ce que deviennent nos propriétés dans des cas simples, ce qui leur donne un éclairage supplémentaire.

Deux agents. Le cas où il n'y a que deux agents est intéressant car une simple procédure du type « je coupe – tu choisis » est assurée de donner aux deux agents leur juste part max-min.

Proposition 12. *S'il n'y a que deux agents, il existe toujours un partage vérifiant la propriété de juste part max-min.*

Démonstration. Soit un partage $\overrightarrow{\pi}$ vérifiant

$$\overrightarrow{\pi} = \mathrm{argmax}_{\overrightarrow{\pi}' \in \mathcal{F}} \min_{j \in \mathcal{A}} u_1(\pi'_j)$$

Par définition, les parts π_1 et π_2 donnent toutes deux à l'agent 1 sa juste part max-min. Par définition, nous avons $u_2(\pi_1) + u_2(\pi_2) = u_2(\mathcal{O})$, et donc l'une des deux parts (disons π_1) est telle que $u_2(\pi_1) \geq \frac{1}{2}u_2(\mathcal{O}) = u_2^{\mathrm{PFS}}$. Puisque $u_2^{\mathrm{PFS}} \geq u_2^{\mathrm{MFS}}$ (proposition 2), $u_2(\pi_1) \geq u_2^{\mathrm{MFS}}$, et donc le partage qui donne π_1 à l'agent 2 et π_2 à l'agent 1 vérifie la juste part max-min. □

Préférences identiques. Lorsque les agents valuent chaque objet par le même poids (ils ont donc la même fonction d'utilité), il s'avère que notre échelle de propriétés n'a plus que deux niveaux : la juste part max-min d'une part, et les autres propriétés confondues d'autre part.

Proposition 13. *Si tous les agents ont des préférences identiques, c'est-à-dire $\forall i, j, l$: $w(j, l) = w(i, l)$, alors*

1. *il existe toujours un partage vérifiant la propriété de juste part max-min, et en particulier tout partage min-optimal la vérifie ;*
2. *si les préférences sur les parts sont strictes, aucun partage ne vérifie la propriété de juste part proportionnelle, et donc de même pour les trois propriétés plus exigeantes ;*
3. *soit un partage admissible $\overrightarrow{\pi}$. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes : (i) chaque agent dans $\overrightarrow{\pi}$ reçoit la même utilité ; (ii) $\overrightarrow{\pi} \models$ CEEI ; (iii) $\overrightarrow{\pi} \models$ EF ; (iv) $\overrightarrow{\pi} \models$ mFS ; (v) $\overrightarrow{\pi} \models$ PFS.*

7. En utilisant un modèle de génération uniforme sur la même idée que la culture impartiale en théorie du vote.

Démonstration. 1. Considérons un partage $\overrightarrow{\pi}^\star$ min-optimal. Alors, pour tout agent i :

$$\begin{aligned} u_i^{\mathrm{MFS}} &\stackrel{def}{=} \max_{\overrightarrow{\pi} \in \mathcal{F}} \min_{j \in \mathcal{A}} u_i(\pi_j) \\ &= \max_{\overrightarrow{\pi} \in \mathcal{F}} \min_{j \in \mathcal{A}} u_j(\pi_j) \\ &= \min_{j \in \mathcal{A}} u_j(\pi_j^\star) \leq u_i(\pi_i^\star) \end{aligned}$$

2. Pour tout partage $\overrightarrow{\pi}$, les N nombres $u_i(\pi_i)$ sont différents. L'un au moins est strictement inférieur à leur moyenne.
3. Démontrons les implications dans l'ordre où elles sont données. Soit un partage $\overrightarrow{\pi}$ dans lequel tous les agents ont la même utilité. Celle-ci vaut $u_i(\mathcal{O})/N$ (pour n'importe quel agent i). Considérons le système de prix suivant : $p_l = Nw(i, l)/u_i(\mathcal{O})$. Alors chaque agent peut s'acheter n'importe quelle part de $\overrightarrow{\pi}$, dont le prix vaut exactement 1, et toute part qui rapporterait plus d'utilité est nécessairement plus chère. Donc $\overrightarrow{\pi} \models$ CEEI. Les trois implications suivantes font partie de la chaîne d'implications de l'échelle de propriétés. La dernière implication fermant le cycle ($\overrightarrow{\pi} \models$ PFS implique parts d'utilités égales) est prouvée facilement. □

Moins d'objets que d'agents.

Proposition 14. *S'il y a moins d'objets que d'agents, alors tout partage vérifie la propriété de juste part max-min, et aucun partage ne vérifie les propriétés plus exigeantes.*

Démonstration. Dans tout partage, un agent au moins ne reçoit pas d'objet, et donc $u_i^{\mathrm{MFS}} = 0$ pour tout i. Comme $0 \leq u_i(\pi_i)$ pour tout i, on en déduit que chacun obtient sa juste part max-min. Aucun partage ne vérifie évidemment la propriété de juste part proportionnelle, et donc aucune des autres, plus exigeantes. □

Autant d'objets que d'agents.

Proposition 15. *S'il y a autant d'objets que d'agents, alors*

1. *tout partage de type couplage (donnant à chaque agent un seul objet) vérifie la propriété de juste part max-min ;*
2. *tout partage vérifiant la propriété de juste part min-max est de type couplage, sans envie, Pareto-optimal et CEEI.*

Démonstration. 1. On a facilement $u_i^{\mathrm{MFS}} = \min_{l \in \mathcal{O}} w(i,l)$, donc tout agent reçoit sa juste part max-min dans un partage de type couplage.
2. On a facilement $u_i^{\mathrm{mFS}} = \max_{l \in \mathcal{O}} w(i,l)$. Soit un partage vérifiant la propriété de juste part min-max. Dans ce partage, chacun obtient donc au moins un objet préféré, donc *un* objet préféré. Il est donc de type couplage, et sans envie. Il est Pareto-optimal car pour qu'un agent reçoive strictement plus d'utilité, il faut nécessairement qu'il prenne la part d'un autre en plus de la sienne, et donc la part de cet autre agent va diminuer. Le prix 1 pour chaque objet assure que le partage est aussi CEEI, car toute augmentation d'utilité d'un agent lui coûtera nécessairement plus cher. □

Poids définis par une même fonction de rang. On s'intéresse ici au cas particulier des fonctions additives, dans lequel tous les agents utilisent exactement le même jeu de poids, formellement $\forall (i,j) \in \mathcal{A}^2$, $\{\!\{w_{i,l} \mid l \in \mathcal{O}\}\!\} = \{\!\{w_{j,l} \mid l \in \mathcal{O}\}\!\}$ (où $\{\!\{\}\!\}$ désigne un multi-ensemble, c'est-à-dire un ensemble dans lequel des éléments peuvent se répéter plusieurs fois). Ce cadre est particulièrement intéressant, car il correspond exactement à un contexte standard en choix social, dans lequel les agents n'expriment qu'une information préférentielle ordinale [8]. Plus précisément, nous pouvons considérer ici que chaque agent i donne un ordre strict sur les objets, de celui qu'il préfère le plus (rang 1), à celui qu'il aime le moins (rang M). Une manière classique de « cardinaliser » l'information ordinale donnée par les agents afin de pouvoir utiliser des critères numériques est d'utiliser une *fonction de rang* (*scoring function*), qui est simplement définie comme une fonction $g : [\![1, M]\!] \to \mathbb{R}^+$ non croissante. En supposant les préférences additives, nous aboutissons à notre modèle de problème de partage, dans lequel, si $r(i,l)$ est le rang de l'objet l dans les préférences de l'agent i, le poids $w(i,l)$ est défini comme $g(r(i,l))$. Cette notion de fonction de rang est à la base de procédures extrêmement classiques en théorie du vote (pluralité, Borda ou veto par exemple), et ce modèle a déjà été porté dans la littérature sur le partage de biens indivisibles [3].

De manière intéressante, dans ce modèle assez général, la conjecture 1 peut être prouvée :

Proposition 16. *Toute instance d'un problème de partage de bien indivisibles dans laquelle les poids des agents sont définis par une même fonction de rang admet au moins un partage possédant la propriété de juste part max-min. En particulier, tout partage min-optimal possède la propriété de juste part max-min.*

Introduisons tout d'abord le résultat suivant (dont la preuve, facile, est omise) :

Lemme 1. *Si les poids des agents sont définis par une même fonction de rang, alors tous les agents ont la même juste part max-min.*

Démonstration. Considérons une instance dans laquelle les agents ont des préférences identiques : ils confèrent à chaque objet le même rang, et ils utilisent la même fonction de rang g. Soit $\overrightarrow{\pi}^\star$ un partage min-optimal pour cette instance. Ce partage vérifie la propriété de juste part max-min (proposition 13.1).

Soit $S = S_1, S_2, ...S_M$ la séquence d'agents ainsi définie : S_p est l'agent qui reçoit dans $\overrightarrow{\pi}^\star$ l'objet de rang p. La séquence est bien définie car chaque objet possède un rang unique (car les préférences sont identiques), et que chaque objet n'est attribué qu'à un seul agent. La séquence S est appelée une « séquence de choix sincères [9] ». Elle prend ici un sens particulier : lorsque chaque agent à son tour dans S choisit l'objet qu'il préfère parmi ceux encore non choisis, on reconstitue le partage $\overrightarrow{\pi}^\star$ [10].

Soit maintenant une instance dans laquelle les agents ont des préférences différentes (les rangs sont différents) mais les poids sont définis par la même fonction de rang g. Définissons un partage $\overrightarrow{\pi}'$ de la manière suivante : chaque agent à son tour dans S se voit attribuer l'(unique) objet de meilleur rang pour lui, parmi ceux non encore attribués. Le point essentiel de la démonstration est que l'utilité d'un agent i dans $\overrightarrow{\pi}'$ ne peut pas baisser par rapport à son utilité dans $\overrightarrow{\pi}^\star$ (où tous les agents avaient les mêmes préférences que lui). En effet, à l'étape p, exactement $p-1$ objets ont été pris, donc le pire objet que i peut espérer avoir est celui de rang p, qu'il a obtenu dans $\overrightarrow{\pi}^\star$. En conséquence, pour chaque agent i, et tout objet de $\pi_i^\star$, il existe un objet de π_i' qui est équivalent ou mieux classé : l'utilité de i augmente donc entre $\overrightarrow{\pi}^\star$ et $\overrightarrow{\pi}'$. Ceci prouve que i obtient sa juste part max-min dans $\overrightarrow{\pi}'$, et ce qui est valable pour tout i, car d'après le lemme 1 tous les agents ont la même juste part max-min.

Maintenant, si nous considérons un partage min-optimal $\overrightarrow{\pi}^\dagger$ pour l'instance précédente, on a $u_i(\pi_i^\dagger) \geq \min_{j \in \mathcal{A}}(u_j(\pi_j')) \; \forall i$, et donc $\overrightarrow{\pi}^\dagger$ assure aussi la juste part max-min à chacun. □

6 Au-delà des préférences additives

Bien qu'il soit probable, en vertu de la conjecture 1, qu'il existe pour toute instance de problème de partage de biens indivisibles à préfé-

8. Ce qui présente l'avantage d'être beaucoup plus aisé pour les agents par rapport à l'expression d'une préférence numérique.

9. Cette idée provient de Brams et King [5], mais est utilisée ici de manière différente.

10. Ceci parce que les préférences sont identiques dans l'instance considérée dans cette étape. Ce n'est pas vrai dans le cas général.

rences additives au moins un partage satisfaisant la juste part max-min, les choses sont différentes pour des préférences plus générales. La manière la plus naturelle de relâcher l'additivité en gardant une certaine compacité d'expression des préférences est d'autoriser des synergies (complémentarités ou substituabilités) limitées entre objets. C'est l'idée-même des fonctions k-additives, introduites à l'origine dans le domaine des mesures floues [11], et utilisées dans le domaine du partage [7] :

Définition 9. *Soit $\mathcal{O} = \{1, ..., M\}$ un ensemble fini d'objets et $k \leq M$ un entier. Une fonction d'utilité $u : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ est k-additive s'il existe une fonction $w : 2^{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ telle que :*
– $w(\pi) = 0$ si $|\pi| > k$;
– $u(\pi) = \sum_{\pi' \subseteq \pi} w(\pi')$ pour tout $\pi \in 2^{\mathcal{O}}$.

Une fonction 1-additive est simplement une fonction additive (correspondant au modèle introduit dans la section 2), et interdit donc l'expression de toute interdépendance préférentielle entre objets. Une fonction 2-additive autorise de telles interdépendances. Ainsi par exemple, le poids $w(\{1, 2\})$ représente l'intérêt propre du couple d'objets $\{1, 2\}$ au-delà de ces objets individuels : si $w(\{1, 2\}) > 0$, la valeur de ce couple est plus importante que la valeur intrinsèque des deux objets séparés, ce qui montre que ces objets sont complémentaires ; si $w(\{1, 2\}) < 0$, les objets peuvent être substitués l'un à l'autre.

Nous allons nous intéresser ici à des instances de problèmes de partage de biens indivisibles à préférences k-additives, c'est-à-dire définies encore par un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, w)$, mais où w est une fonction de $\mathcal{A} \times 2^{\mathcal{O}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout i, l'application $\pi \mapsto w(i, \pi)$ est k-additive.

Dès que l'on passe des fonctions (1-)additives aux fonctions 2-additives, la conjecture 1 n'est plus valable. Pis, on peut montrer que le simple problème d'existence d'un partage satisfaisant la juste part max-min (problème que nous noterons [EXIST.-MFS-k-ADD]) est difficile :

Proposition 17. *Le problème* [EXIST.-MFS-k-ADD] *est* NP*-difficile, pour $k \geq 2$, et $n \geq 3$.*

Démonstration. On montre la NP-difficulté par réduction depuis le problème de partition (Problème 2). Soit $\langle\{x_1, \ldots, x_n\}, s\rangle$ une instance de ce problème. De cette instance, nous pouvons créer une instance du problème [EXIST.-MFS-2-ADD] à 3 agents et $n + 4$ objets, dont les préférences sont définies comme suit :
- pour tout i, $w(i, \{l\}) = s(x_l)$ et $w(i, \{l, n+m\}) = -3L$ pour tout $l \in [\![1, n]\!]$ et $m \in [\![1, 4]\!]$;
- $w(1, \{n + 1, n + 2\}) = w(1, \{n + 3, n + 4\}) = L$
- $w(2, \{n + 1, n + 3\}) = w(2, \{n + 2, n + 4\}) = L$
- $w(3, \{n + 1, n + 4\}) = w(3, \{n + 2, n + 3\}) = L$
- $w(i, \pi) = 0$ pour toutes les autres parts π.

Calculons la juste part max-min pour chaque agent. Pour l'agent 1, considérons le partage $(\{1, \ldots, n\}, \{n + 1, n + 2\}, \{n + 3, n + 4\})$ L'évaluation de ces trois parts par l'agent 1 donne respectivement $2L$, L, et L. Donc $u_1^{\text{MFS}} \geq L$.

Considérons un partage quelconque $\overrightarrow{\pi}$. Trois cas sont possibles. (i) Il existe une part π_i telle que $\pi_i \supseteq \{l, m\}$, avec $l \leq n$ et $m > n$. Alors $u_1(\pi_i) \leq 0$, (ii) les objets $m > n$ sont répartis dans deux parts différentes (disons π_1 et π_2) ne contenant aucun objet de $l \leq n$. Alors $\pi_1 \leq L$ ou $\pi_2 \leq L$. (iii) les objets $m > n$ n'apparaissent que dans une seule part (disons π_1). Dans ce cas, les parts π_2 et π_3 se répartissent les objets $l \leq n$. Puisque la fonction d'utilité de l'agent i est additive sur les objets de $\{1, \ldots, n\}$ et que $\sum_{l=1}^{n} w(1, \{l\}) = 2L$, on a $u_i(\pi_2) \leq L$ ou $u_i(\pi_3) \leq L$. Dans les cas (i), (ii) et (iii), $\min_{i \in \mathcal{A}} u_1(\pi_i) \leq L$. Donc $u_1^{\text{MFS}} = K$. Le cas des autres agents est similaire.

Considérons maintenant un partage $\overrightarrow{\pi}$. Si $\overrightarrow{\pi}$ est tel qu'il existe une part π_i telle que $\pi_i \supseteq \{l, m\}$, avec $l \leq n$ et $m > n$, alors comme précédemment $u_i(\pi_i) \leq 0 < u_i^{\text{MFS}}$. Plaçons-nous dans le cas contraire, et supposons donc qu'il existe une part (disons sans perte de généralité π_1) qui ne contienne que des objets $m > n$. Alors soit $u_1(\pi_1) = 0$, auquel cas l'agent 1 n'a pas sa juste part max-min, soit $u_1(\pi_1) > 0$ et donc $\pi_1 \supseteq \{n + 1, n + 2\}$, soit $\pi_1 \supseteq \{n + 3, n + 4\}$. Dans n'importe lequel de ces deux derniers cas, on peut voir que si jamais une autre part contient des objets $m > n$ (donc ne contient que ces objets, en vertu de notre hypothèse), alors l'utilité résultante pour l'agent est de 0, et donc le partage ne satisfait pas sa juste part max-min.

Supposons donc que π_2 et π_3 ne contiennent que des objets $l \leq n$. $\overrightarrow{\pi}$ garantit la juste part max-min aux agents 2 et 3 ssi $u_2(\pi_2) \geq L$ et $u_3(\pi_3) \geq L$, ce qui revient à trouver une partition des objets l en 2 sous-ensembles de valeur L, et donc une partition de $\mathcal{X}$ dans l'instance initiale du problème [PARTITION]. □

Notons que la proposition 17 donne un résultat de NP-difficulté, mais pas de NP-complétude, car il n'est pas prouvé que le problème [EXIST.-MFS-k-ADD] est dans NP. Tout ce que nous pouvons dire est que le problème est dans Σ_2^{P}, car il peut être résolu par l'algorithme non déterministe polynomial suivant : (i) deviner un partage $\overrightarrow{\pi}$; (ii) pour tout $i \in A$, calculer la juste part max-min u_i^{MFS} de l'agent i ; (iii) pour tout $i \in A$, vérifier que $u_i(\pi_j) \geq u_i^{\text{MFS}}$.

7 Conclusion et perspectives

Nous avons exposé dans ce papier cinq propriétés d'équité pour les problèmes de partage, dont deux sont très classiques, deux sont moins connues, et une est originale. Nous avons mis en évidence les liens entre ces propriétés dans le cadre du problème de partage de biens indivisibles à préférences additives, ce qui nous a permis de définir une échelle permettant de caractériser le degré d'équité d'un partage, et le degré de conflictualité d'une instance. Cette dernière information, en plus du partage décidé, est un retour important pour les agents dans le cadre d'une procédure centralisée. Nous avons caractérisé la complexité associée à ces propriétés, et nous avons montré que l'extension de ces résultats à un modèle de préférences plus général n'était pas immédiate.

Outre la conjecture 1, ce travail soulève de nombreuses questions. Tout d'abord, quatre de ces propriétés étant purement ordinales, on peut s'interroger sur la transposition de nos résultats dans un modèle avec préférences ordinales. En outre, en dépit de la complexité élevée associée à ces propriétés, la question de trouver des algorithmes permettant de trouver les meilleurs partages selon cette échelle qualitative est d'importance. Enfin, des expérimentations systématiques sur des instances de petites tailles devraient permettre de dresser une cartographie des problèmes de partage de biens indivisibles s'appuyant sur cette échelle qualitative.

Références

[1] N. Bansal and M. Sviridenko. The Santa Claus problem. In *Proc of STOC'06*, 2006.

[2] N. Bianchessi, J.-F. Cordeau, J. Desrosiers, G. Laporte, and V. Raymond. A heuristic for the multi-satellite, multi-orbit and multi-user management of earth observation satellites. *EJOR*, 177(2), 2007.

[3] S. Bouveret and J. Lang. A general elicitation-free protocol for allocating indivisible goods. In *Proc. of IJCAI'11*, 2011.

[4] S. J. Brams, P. H. Edelman, and P. C. Fishburn. Fair division of indivisible items. *Theory and Decision*, 5(2), 2004.

[5] S. J. Brams and D. King. Efficient fair division – help the worst off or avoid envy ? *Rationality and Society*, 17(4), 2005.

[6] E. Budish. The combinatorial assignment problem : Approximate competitive equilibrium from equal incomes. *Journal of Political Economy*, 119(6), 2011.

[7] Y. Chevaleyre, U. Endriss, S. Estivie, and N. Maudet. Multiagent resource allocation with k-additive utility functions. In *Proc. DIMACS-LAMSADE Workshop on Computer Science and Decision Theory*, 2004.

[8] Y. Chevaleyre, U. Endriss, and N. Maudet. On maximal classes of utility functions for efficient one-to-one negociation. In *Proc. of IJCAI'05*, 2005.

[9] B. de Keijzer, S. Bouveret, T. Klos, and Y. Zhang. On the complexity of efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods with additive preferences. In *Proc. of ADT'09*. Springer Verlag, 2009.

[10] D. Foley. Resource allocation and the public sector. *Yale Econ. Essays*, 7(1), 1967.

[11] M. Grabisch. k-order additive discrete fuzzy measure and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 92, 1997.

[12] D. K. Herreiner and C. Puppe. A simple procedure for finding equitable allocations of indivisible goods. *Social Choice and Welfare*, 19, 2002.

[13] M. Lemaître, G. Verfaillie, and N. Bataille. Exploiting a common property resource under a fairness constraint : a case study. In *Proc. of IJCAI'99*, 1999.

[14] R. Lipton, E. Markakis, E. Mossel, and A. Saberi. On approximately fair allocations of divisible goods. In *Proceedings of EC'04*, 2004.

[15] J. S. Mill. *Utilitarianism*. University of Chicago Press, 1906.

[16] H. Moulin. *Cooperative Microeconomics, A Game-Theoretic Introduction*. Prentice Hall, 1995.

[17] A. Othman, T. Sandholm, and E. Budish. Finding approximate competitive equilibria : efficient and fair course allocation. In *Proceedings of AAMAS'10*, 2010.

[18] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison–Wesley, 1994.

[19] J. Rawls. *A Theory of Justice*. Harvard University Press, 1971.

[20] A. K. Sen. *Collective Choice and Social Welfare*. North-Holland, 1970.

[21] H. Steinhaus. The problem of fair division. *Econometrica*, 16(1), 1948.