



## Prendre des décisions en commun

### Une courte introduction au choix social

---

**Sylvain Bouveret**

LIG – Univ. Grenoble-Alpes

---

CED Cours transversal Sciences Environnement Sociétés

Grenoble, 31 mai 2021



# Objectifs globaux de la formation

- Donner un aperçu global de certains enjeux socio-environnementaux de notre époque
- Permettre de développer une pensée systémique
- Fournir des éléments d'analyse critique des discours sur les futurs
- Discuter de la place de la science dans la société.



# Plan de situation

- 1 | Histoire énergétique planétaire
- 2 | Etat actuel de notre environnement
- 3 | Méthodes d'évaluations environnementales
- 4 | Construction d'indicateurs
- 5 | Théorie du vote / Décision collective
- 6 | Low techs
- 7 | (Table ronde ?)

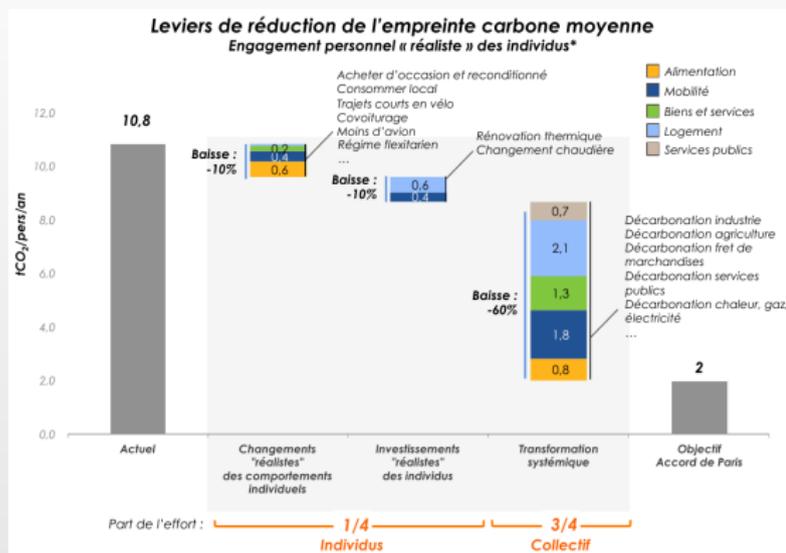


# Plan de situation

- 1 | Histoire énergétique planétaire
- 2 | Etat actuel de notre environnement
- 3 | Méthodes d'évaluations environnementales
- 4 | Construction d'indicateurs
- 5 | **Théorie du vote / Décision collective** ← **Vous êtes ici**
- 6 | Low techs
- 7 | (Table ronde ?)



# Des plans pour le futur ?

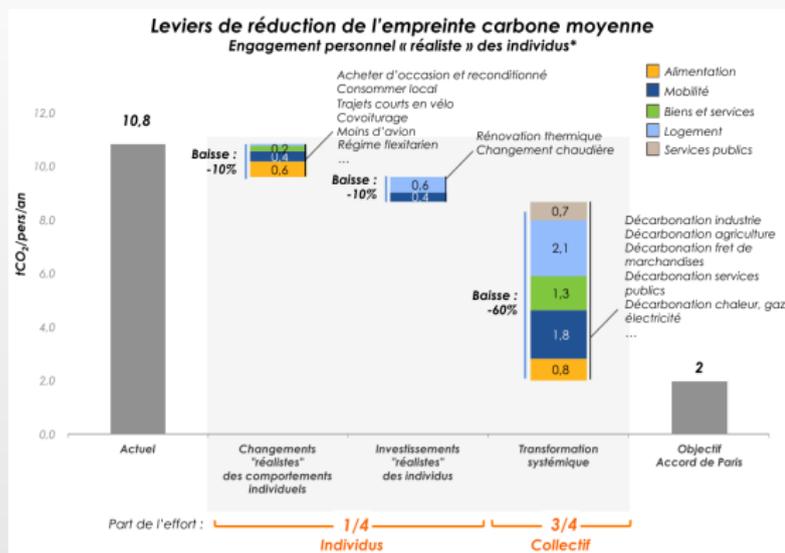


Source :

Carbon 4 - Faire sa part ? pouvoir et responsabilité des individus, des entreprises et de l'état face à l'urgence climatique)



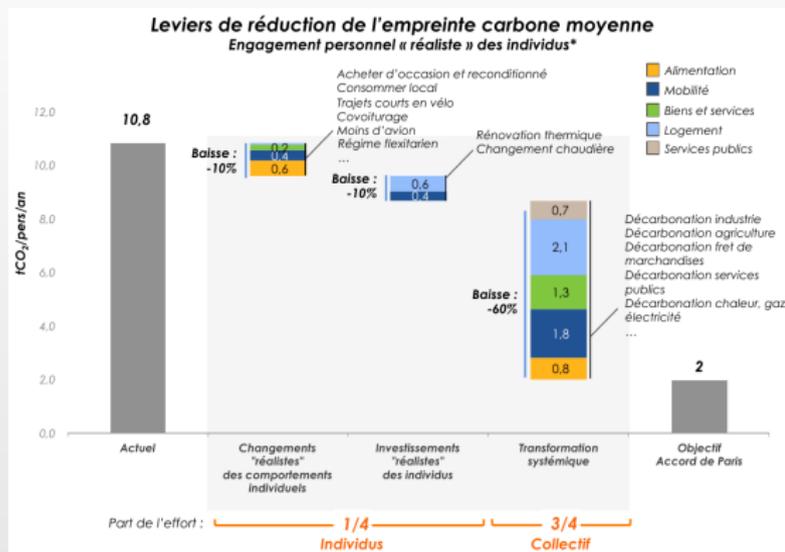
# Des plans pour le futur ?



Qui décide des actions à réaliser en commun et comment ?



# Des plans pour le futur ?



Source :

Carbone 4 - *Faire sa part ? pouvoir et responsabilité des individus, des entreprises et de l'état face à l'urgence climatique*

Qui décide des actions à réaliser en commun et comment ?

La **décision collective** est au cœur de la société et aucune transition ne se fera sans une réflexion sur ces mécanismes de décision en commun.



# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**



---

# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

---

- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
-



# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

- 
- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
-



# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

- 
- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
  - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
-



# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

- 
- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
  - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
- 



Opinion collective, choix d'une option...



# Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
- Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
- ...Exprimant des **opinions** sur les options.



Opinion collective, choix d'une option...

**Quiz** : Quelles situations réelles de décision collective connaissez-vous ?  
Quels en sont les enjeux et la portée (locale, globale) ?



# Le vote

## Problème n°1 : le vote



# Le vote

## Problème n°1 : le vote



Source :

© Capture d'écran de la chaîne YouTube de McFly et Carlito



# Le vote

## Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.



# Le vote

## Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.

- Options : candidats ( $m$ )
- Agents : électeurs ( $n$ )
- Préférences : bulletins de vote



# Le vote

## Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.

- Options : candidats ( $m$ )
- Agents : électeurs ( $n$ )
- Préférences : bulletins de vote

Nous reviendrons sur ce problème en détails plus tard.



## Le vote de comité

### Problème n°2 : le vote de comité



# Le vote de comité

## Problème n°2 : le vote de comité





## Le vote de comité

### Problème n°2 : le vote de comité

Nous devons élire un **ensemble** de représentants parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.



## Le vote de comité

### Problème n°2 : le vote de comité

Nous devons élire un **ensemble** de représentants parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.

- Options : **sous-ensembles** de candidats ( $m$ )
- Agents : électeurs ( $n$ )
- Préférences : bulletins de vote

Malgré sa similarité avec le problème de vote simple, il a des caractéristiques singulières.

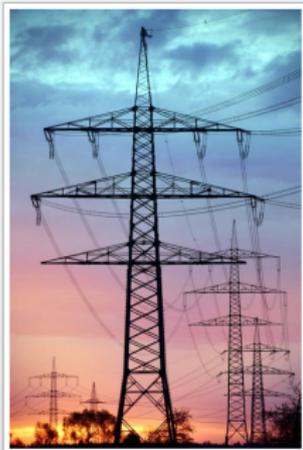
**Applications** : élections parlementaires, conseil de laboratoire, recrutement, budget participatif...

On en reparlera (peut-être) plus tard...



# Partage équitable continu

## Problème n°3 : le partage continu



Formellement : problème de partage de gâteau (*cake-cutting*)



## Partage équitable continu – gâteaux

### Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



## Partage équitable continu – gâteaux

### Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.

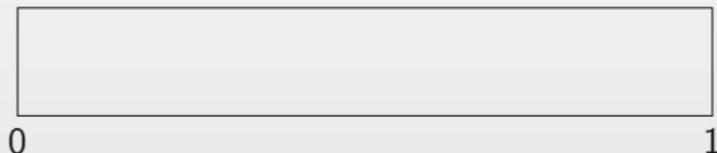




## Partage équitable continu – gâteaux

### Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



- Options : différents partages du gâteau ( $\infty$ )
- Agents : les convives ( $n$ )
- Préférences : fonctions d'évaluation (continues, en général additives)



## Des protocoles de partage

En général, on s'intéresse à :

- **La proportionalité** : chaque agent pense que sa part vaut au moins  $\frac{1}{n}$  du gâteau total.
- **L'absence d'envie** : chaque agent pense que sa part est meilleure que n'importe quelle part reçue par les autres convives.



## Des protocoles de partage

En général, on s'intéresse à :

- **La proportionalité** : chaque agent pense que sa part vaut au moins  $\frac{1}{n}$  du gâteau total.
- **L'absence d'envie** : chaque agent pense que sa part est meilleure que n'importe quelle part reçue par les autres convives.

**Quiz** : Vous êtes deux convives, et vous avez un couteau (pour le gâteau, pas pour vous étripier...). Pouvez-vous proposer un protocole simple de partage du gâteau garantissant ces deux propriétés ?



## Des protocoles de partage

En général, on s'intéresse à :

- **La proportionalité** : chaque agent pense que sa part vaut au moins  $\frac{1}{n}$  du gâteau total.
- **L'absence d'envie** : chaque agent pense que sa part est meilleure que n'importe quelle part reçue par les autres convives.

**Quiz** : Vous êtes deux convives, et vous avez un couteau (pour le gâteau, pas pour vous étripier...). Pouvez-vous proposer un protocole simple de partage du gâteau garantissant ces deux propriétés ?

2 agents : Je coupe, tu choisis.

- Agent 1 coupe le gâteau en deux parts qu'il estime égales.
- Agent 2 choisit laquelle des deux parts il prend.



## Plus de deux agents

**Quiz :** Et si vous êtes plus que deux ?



## Plus de deux agents

**Quiz :** Et si vous êtes plus que deux ?

Absence d'envie : pas simple...



## Plus de deux agents

**Quiz :** Et si vous êtes plus que deux ?

Absence d'envie : pas simple...

Proportionalité : procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

- 1 | L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir  $\frac{1}{n}$



## Plus de deux agents

**Quiz :** Et si vous êtes plus que deux ?

Absence d'envie : pas simple...

Proportionalité : procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

- 1 | L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir  $\frac{1}{n}$
- 2 | Chaque agent de 2 à  $n$  peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.



## Plus de deux agents

### Quiz : Et si vous êtes plus que deux ?

Absence d'envie : pas simple...

Proportionalité : procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

- 1 | L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir  $\frac{1}{n}$
- 2 | Chaque agent de 2 à  $n$  peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
- 3 | Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.



## Plus de deux agents

### Quiz : Et si vous êtes plus que deux ?

Absence d'envie : pas simple...

Proportionalité : procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

- 1 | L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir  $\frac{1}{n}$
- 2 | Chaque agent de 2 à  $n$  peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
- 3 | Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.
- 4 | Le jeu recommence avec les agents restants et le reste du gâteau.



## Partage équitable discret

### **Problème n°4 : le partage discret**

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



## Partage équitable discret

### Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



# Partage équitable discret

## Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.





# Partage équitable discret

## Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.

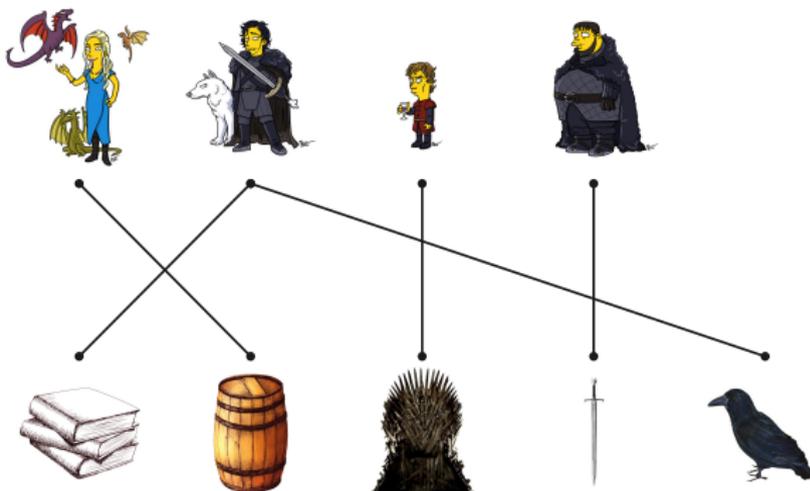




# Partage équitable discret

## Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.





## Partage équitable discret

### Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



## Partage équitable discret

### Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



## Partage équitable discret

### Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de  $m$  objets indivisibles entre  $n$  agents ayant des évaluations différentes de ces objets.

- Options : partages possibles ( $n^m$ )
- Agents : consommateurs d'objets ( $n$ )
- Préférences : fonction d'évaluation / ordres...

**Applications** : Affectation de sujets de TP à des étudiants, répartition de tâches entre robots, systèmes de *crowdsourcing*, répartition de tâches à des machines...

Nous reviendrons (peut-être) sur ce problème en détails plus tard.



## Affectation (matching)

### Problème n°5 : l'affectation

Nous devons associer des agents d'un groupe  $S_1$  à des agents d'un groupe  $S_2$ . Les agents de  $S_1$  ont des préférences sur les agents de  $S_2$ , et vice-versa.



# Affectation (matching)

## Problème n°5 : l'affectation

Nous devons associer des agents d'un groupe  $S_1$  à des agents d'un groupe  $S_2$ . Les agents de  $S_1$  ont des préférences sur les agents de  $S_2$ , et vice-versa.

Exemples :

- Affectation d'étudiants à des écoles<sup>1</sup> (one-to-many matching)
- Affectation d'étudiants à des projets (many-to-many matching)
- Appariement d'hommes et de femmes – mariage stable<sup>2</sup> (one-to-one matching)

<sup>1</sup> Tiens, ça vous rappelle quelque chose ? (#ParcoursSup)

<sup>2</sup> Métaphore inventée à une époque où le mariage entre personnes de même sexe n'était pas légal...



## Le problème du mariage stable

- $n$  femmes et  $n$  hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)



# Le problème du mariage stable

- $n$  femmes et  $n$  hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)

## Stable ?

- Ashley est mariée à Brandon – Ashley  $\leftrightarrow$  Brandon
- Cliff est marié à Daisy – Cliff  $\leftrightarrow$  Daisy
- Ashley préfère Cliff à Brandon – Ashley : Cliff  $\succ$  Brandon
- Cliff préfère Ashley à Daisy – Cliff : Ashley  $\succ$  Daisy



# Le problème du mariage stable

- $n$  femmes et  $n$  hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)

## Stable ?

- Ashley est mariée à Brandon – Ashley  $\leftrightarrow$  Brandon
- Cliff est marié à Daisy – Cliff  $\leftrightarrow$  Daisy
- Ashley préfère Cliff à Brandon – Ashley : Cliff  $\succ$  Brandon
- Cliff préfère Ashley à Daisy – Cliff : Ashley  $\succ$  Daisy

Ashley  $\not\leftrightarrow$  Brandon + Cliff  $\not\leftrightarrow$  Daisy  $\Rightarrow$  Ashley  $\leftrightarrow$  Cliff

...Mauvais matching (mais bon scénario de sitcom)



## L'algorithme de Gale-Shapley (1962)

On peut trouver un mariage stable « facilement » :

- Chaque homme non fiancé fait une proposition à sa favorite parmi les femmes auxquelles il n'a encore fait aucune proposition.
- Chaque femme choisit son favori parmi toutes les propositions qu'elle reçoit (si elle est déjà fiancée et que la meilleure proposition reçue surpasse son fiancé actuel, elle rompt son engagement).
- On boucle jusqu'à ce que tout le monde soit fiancé.



## Formation de coalition

### **Problème n°6 : la formation de coalitions**

$n$  agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.



## Formation de coalition

### Problème n°6 : la formation de coalitions

$n$  agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants ( $n$ ).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.



## Formation de coalition

### Problème n°6 : la formation de coalitions

$n$  agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants ( $n$ ).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.

Généralisation du problème d'affectation. En général, on s'intéresse aux coalitions stables (jeux hédoniques), ou aux coalitions collectivement optimales.



# Agrégation de jugement

## Problème n°7 : l'agrégation de jugement

Nous disposons de  $m$  énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants.  $n$  juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.



# Agrégation de jugement

## Problème n°7 : l'agrégation de jugement

Nous disposons de  $m$  énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants.  $n$  juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.

- Options : énoncés logiquement interdépendants ( $m$ )
- Agents : juges ( $n$ )
- Préférences : en général binaires (oui / non)



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter  $\leftrightarrow$  Niveau  $\wedge$  Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité			



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter  $\leftrightarrow$  Niveau  $\wedge$  Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui		



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter  $\leftrightarrow$  Niveau  $\wedge$  Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter  $\leftrightarrow$  Niveau  $\wedge$  Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non



## Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter  $\leftrightarrow$  Niveau  $\wedge$  Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non

- (Retour des relecteurs sur votre papier). Votre papier est original et a le niveau technique suffisant. Mais nous avons décidé de le rejeter...



# Agrégation de jugement

- Agrégation de jugement : agréger des opinions sur des énoncés logiquement dépendants... mais d'une manière cohérente
- Liens forts avec le raisonnement non monotone, la fusion de croyances, la prise en compte d'inconsistences.



## Du choix social partout...

- Affectation de cours à des étudiants
- Élire un représentant politique (par exemple le président de la république)
- Choisir une date commune pour une réunion
- Choisir le futur nom d'une région
- Élire le vainqueur de l'Eurovision
- Planifier la charge de travail d'une équipe de travailleurs
- Affecter des patients à des hôpitaux
- Diviser un territoire
- Former des équipes
- Choisir un emplacement pour une infrastructure commune
- ...



## Remarque finale

Le problème de choix social :

---

- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ ...
  - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
- 



Opinion collective, choix d'une option...



## Remarque finale

Le problème de choix social :

---

- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble d'**agents**  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ ...
  - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
- 



Opinion collective, choix d'une option...

Ça ne vous rappelle rien ?



# L'agrégation multicritères

Un problème cousin – l'agrégation multicritères :

---

- Un ensemble d'**options**  $\mathcal{O}$
  - Un ensemble de **critères**  $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ ...
  - ...Permettant d'**évaluer** les options.
- 



Évaluation multicritères, choix d'une option...

Formellement le même problème, mais dans des contextes différents (et avec des solutions différentes)

## Le problème de vote

---

Qui est le meilleur candidat ?



# Le vote

## Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.

OK... Mais comment fait-on en pratique ?

**Quiz :** Comment feriez-vous concrètement ?



# Le vote

## Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de  $m$  candidats sur lesquels  $n$  électeurs ont diverses préférences.

OK... Mais comment fait-on en pratique ?

**Quiz :** Comment feriez-vous concrètement ?



Demandons à Albert...

<https://www.youtube.com/watch?v=vfTJ4vmIs04>



# Les procédures de vote

**Quiz :** Que retenir de cette vidéo ?





# Les procédures de vote

**Quiz :** Que retenir de cette vidéo ?

Revoyons les différentes procédures de vote :

<https://whale.imag.fr/polls/viewPoll/f129915d-5ad3-4e83-9261-a6668efa8c84>



## Quelle procédure ?

Alors, comment choisir une procédure de vote qui tient la route ?

On peut s'appuyer sur des propriétés désirables : anonymat, unanimité, neutralité...

Mais...

- **Théorème d'Arrow** (1951) :

Dès qu'il y a au moins 3 options, toute fonction d'agrégation satisfaisant l'**unanimité** et l'**indépendance aux alternatives non pertinentes** est forcément **dictatoriale**.

(NB : le choix social est pavé de théorèmes d'impossibilité de ce genre...)



## Quelle procédure ?

- On ne peut pas tout avoir → il faut se focaliser sur les propriétés désirables que l'on souhaite : monotonie, unanimité, renforcement, résistance à la manipulation, indépendance aux clones...
- Expression des bulletins : uninominal ? approbation ? ordre ? note ?
- Compréhensibilité de la procédure (bulletins + calcul du vainqueur)



Source : FabCaro (2019) *Open Bar 1ère Tournée*. Delcourt

## Pause

---

### Que voulez-vous voir ensuite ?

- 1 | Changeons l'élection présidentielle ! Un retour sur une expérimentation menée lors de la présidentielle 2017.
- 2 | Réformons l'élection législative ! Que se passerait-il si l'on introduisait de la proportionnelle ?
- 3 | Partageons les ressources ! Où comment les chercheurs partagent équitablement un ensemble d'objets.

**Votez !**

Vous allez recevoir un lien par mail – Nous utiliserons le vote alternatif