



Prendre des décisions en commun

Une courte introduction au choix social

Sylvain Bouveret

LIG – Grenoble INP / Ensimag

CED Cours transversal Sciences Environnement Société

Grenoble, 18 juin 2025

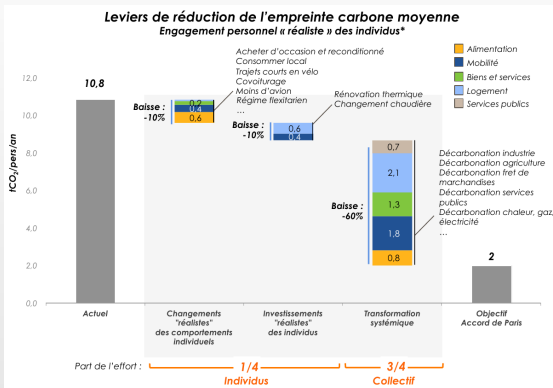


Objectifs globaux de la formation

- Donner un aperçu global de certains enjeux socio-environnementaux de notre époque
- Permettre de développer une pensée systémique
- Fournir des éléments d'analyse critique des discours sur les futurs
- Discuter de la place de la science dans la société



Des plans pour le futur ?

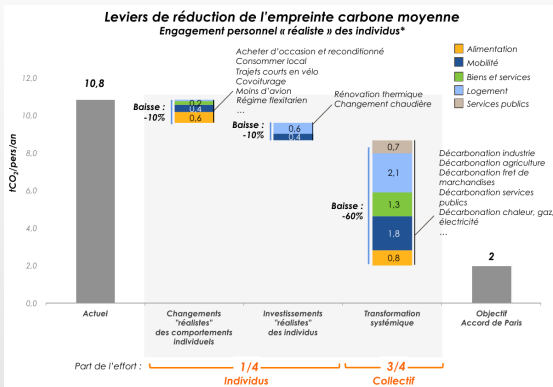


Source :

Carbone 4 - *Faire sa part ? pouvoir et responsabilité des individus, des entreprises et de l'état face à l'urgence climatique*



Des plans pour le futur ?



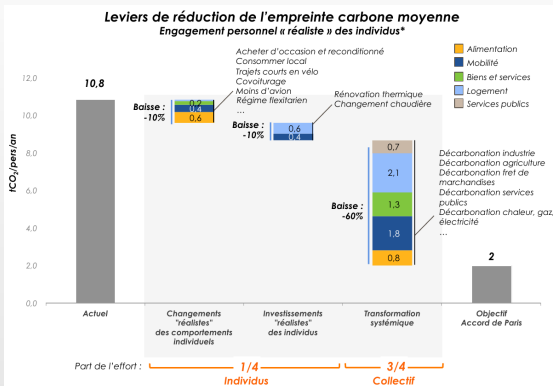
Source :

Carbone 4 - *Faire sa part ? pouvoir et responsabilité des individus, des entreprises et de l'état face à l'urgence climatique*

Qui décide des actions à réaliser en commun et comment ?



Des plans pour le futur ?



Source :

Carbone 4 - *Faire sa part ? pouvoir et responsabilité des individus, des entreprises et de l'état face à l'urgence climatique*)

Qui décide des actions à réaliser en commun et comment ?

La décision collective est au cœur de la société et aucune transition ne se fera sans une réflexion sur ces mécanismes de décision en commun.



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

-
- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
-



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

-
- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
 - Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
-



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

-
- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
 - Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
 - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
-



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

-
- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
 - Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
 - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
-



Opinion collective, choix d'une option...



Décision collective et choix social

Il existe une discipline scientifique dédiée à l'étude des problèmes de **décision collective** : la **théorie du choix social**

-
- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
 - Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \dots$
 - ...Exprimant des **opinions** sur les options.
-



Opinion collective, choix d'une option...

Quiz : Quelles situations réelles de décision collective connaissez-vous ?
Quels en sont les enjeux et la portée (locale, globale) ?



Le vote

Problème n°1 : le vote



Le vote

Problème n°1 : le vote



Source :

© Capture d'écran de la chaîne YouTube de McFly et Carlito



Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.



Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

- Options : candidats (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote



Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

- Options : candidats (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote

Nous reviendrons sur ce problème en détails plus tard.



Le vote de comité

Problème n°2 : le vote de comité



Le vote de comité

Problème n°2 : le vote de comité





Le vote de comité

Problème n°2 : le vote de comité

Nous devons élire un **ensemble** de représentants parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.



Le vote de comité

Problème n°2 : le vote de comité

Nous devons élire un **ensemble** de représentants parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

- Options : **sous-ensembles** de candidats (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote

Malgré sa similarité avec le problème de vote simple, il a des caractéristiques singulières.

Applications : élections parlementaires, conseil de laboratoire, recrutement...

On en reparlera (peut-être) plus tard...



Le budget participatif

Problème n°2 (variante) : le budget participatif

Nous devons sélectionner un **ensemble** de projets parmi un ensemble de m projets-candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences. Chaque projet a un coût et nous avons un budget global à respecter.



Le budget participatif

Problème n°2 (variante) : le budget participatif

Nous devons sélectionner un **ensemble** de projets parmi un ensemble de m projets-candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences. Chaque projet a un coût et nous avons un budget global à respecter.

- Options : **sous-ensembles** de projets (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote

À la fois un problème de vote de comité et un problème de sac-à-dos

Applications : budget participatif...



Le budget participatif (exemple)

Budget total : 1100 €

projet	coût	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
piste cyclable	700 €	✓	✓	✓	✓	✓	✓					✓
parcours de santé	400 €	✓	✓	✓	✓	✓	✓					
parc	250 €		✓		✓	✓		✓			✓	
parc jeux	200 €							✓	✓	✓	✓	
biblio. pour enfants	100 €							✓		✓	✓	

Quels projets choisissez-vous de financer ?



Le budget participatif (exemple)

Budget total : 1100 €

projet	coût	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
piste cyclable	700 €	✓	✓	✓	✓	✓	✓					✓
parcours de santé	400 €	✓	✓	✓	✓	✓	✓					
parc	250 €		✓		✓	✓		✓			✓	
parc jeux	200 €							✓	✓	✓	✓	
biblio. pour enfants	100 €							✓		✓	✓	

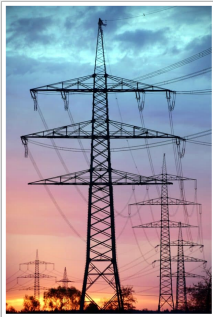
Quels projets choisissez-vous de financer ?

Méthodes classiques : optimisation, greedy, parts égales



Partage équitable continu

Problème n°3 : le partage continu



Formellement : problème de partage de gâteau (*cake-cutting*)



Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°3 : le partage continu

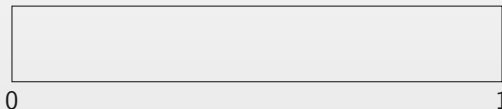
Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.

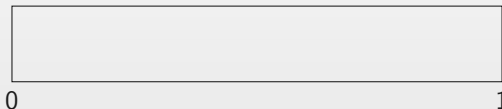




Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



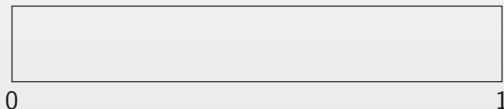
- Options : différents partages du gâteau (∞)
- Agents : les convives (n)
- Préférences : fonctions d'évaluation (continues, en général additives)



Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°3 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



- Options : différents partages du gâteau (∞)
- Agents : les convives (n)
- Préférences : fonctions d'évaluation (continues, en général additives)

Je n'en dis pas plus... Ce sera l'objet de la dernière séance.



Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.





Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.

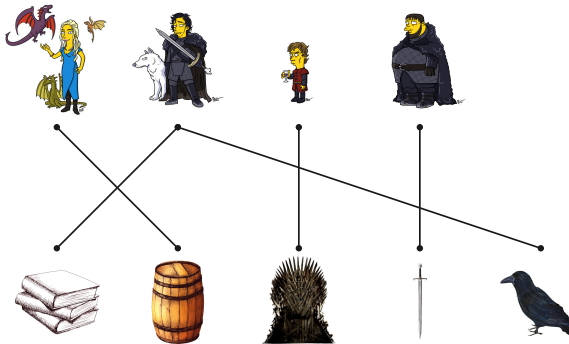




Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.





Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



Partage équitable discret

Problème n°4 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.

- Options : partages possibles (n^m)
- Agents : consommateurs d'objets (n)
- Préférences : fonction d'évaluation / ordres...

Applications : Affectation de sujets de TP à des étudiants, répartition de tâches entre robots, systèmes de *crowdsourcing*, répartition de tâches à des machines...



Affectation (matching)

Problème n°5 : l'affectation

Nous devons associer des agents d'un groupe S_1 à des agents d'un groupe S_2 . Les agents de S_1 ont des préférences sur les agents de S_2 , et vice-versa.



Affectation (matching)

Problème n°5 : l'affectation

Nous devons associer des agents d'un groupe S_1 à des agents d'un groupe S_2 . Les agents de S_1 ont des préférences sur les agents de S_2 , et vice-versa.

Exemples :

- Affectation d'étudiants à des écoles¹ (one-to-many matching)
- Affectation d'étudiants à des projets (many-to-many matching)
- Appariement d'hommes et de femmes – mariage stable² (one-to-one matching)

¹ Tiens, ça vous rappelle quelque chose ? (#ParcoursSup)

² Métaphore inventée à une époque où le mariage entre personnes de même sexe n'était pas légal...



Le problème du mariage stable

- n femmes et n hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)



Le problème du mariage stable

- n femmes et n hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)

Stable ?

- Alice est mariée à Bob – Alice $\leftrightarrow$ Bob
- David est marié à Carol – David $\leftrightarrow$ Carol
- Alice préfère David à Bob – Alice : David $\succ$ Bob
- David préfère Alice à Carol – David : Alice $\succ$ Carol



Le problème du mariage stable

- n femmes et n hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un appariement **stable** (sans couple bloquant)

Stable ?

- Alice est mariée à Bob – Alice $\leftrightarrow$ Bob
- David est marié à Carol – David $\leftrightarrow$ Carol
- Alice préfère David à Bob – Alice : David $\succ$ Bob
- David préfère Alice à Carol – David : Alice $\succ$ Carol

Alice $\nleftrightarrow$ Bob + David $\nleftrightarrow$ Carol $\Rightarrow$ Alice $\leftrightarrow$ David

...Mauvais matching (mais bon scénario de sitcom)



L'algorithme de Gale-Shapley (1962)

On peut trouver un mariage stable « facilement » :

- Chaque homme non fiancé fait une proposition à sa favorite parmi les femmes auxquelles il n'a encore fait aucune proposition.
- Chaque femme choisit son favori parmi toutes les propositions qu'elle reçoit (si elle est déjà fiancée et que la meilleure proposition reçue surpasse son fiancé actuel, elle rompt son engagement).
- On boucle jusqu'à ce que tout le monde soit fiancé.



L'algorithme de Gale-Shapley (1962)

On peut trouver un mariage stable « facilement » :

- Chaque homme non fiancé fait une proposition à sa favorite parmi les femmes auxquelles il n'a encore fait aucune proposition.
- Chaque femme choisit son favori parmi toutes les propositions qu'elle reçoit (si elle est déjà fiancée et que la meilleure proposition reçue surpasse son fiancé actuel, elle rompt son engagement).
- On boucle jusqu'à ce que tout le monde soit fiancé.

NB : Cet algorithme est-il symétrique ? Qui est avantagé dans cet algorithme ?



Formation de coalition

Problème n°6 : la formation de coalitions

n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.



Formation de coalition

Problème n°6 : la formation de coalitions

n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants (n).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.



Formation de coalition

Problème n°6 : la formation de coalitions

n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants (n).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.

Généralisation du problème d'affectation. En général, on s'intéresse aux coalitions stables (jeux hédoniques), ou aux coalitions collectivement optimales.



Agrégation de jugement

Problème n°7 : l'agrégation de jugement

Nous disposons de m énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants. n juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.



Agrégation de jugement

Problème n°7 : l'agrégation de jugement

Nous disposons de m énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants. n juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.

- Options : énoncés logiquement interdépendants (m)
- Agents : juges (n)
- Préférences : en général binaires (oui / non)



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité			



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui		



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non



Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Vous avez soumis un papier à l'*International Conference on Whatever* (ICW)
- Instructions du PC chair de l'ICW : un papier doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et s'il est original.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Original

	Niveau ?	Original ?	Accepter ?
Reviewer 1	Oui	Oui	Oui
Reviewer 2	Oui	Non	Non
Reviewer 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non

- (Retour des relecteurs sur votre papier). Votre papier est original et a le niveau technique suffisant. Mais nous avons décidé de le rejeter...



Agrégation de jugement

- Agrégation de jugement : agréger des opinions sur des énoncés logiquement dépendants... mais d'une manière cohérente
- Liens forts avec le raisonnement non monotone, la fusion de croyances, la prise en compte d'inconsistences.



Du choix social partout...

- Affectation de cours à des étudiants
- Élire un représentant politique (par exemple le président de la république)
- Choisir une date commune pour une réunion
- Choisir le futur nom d'une région
- Élire le vainqueur de l'Eurovision
- Planifier la charge de travail d'une équipe de travailleurs
- Affecter des patients à des hôpitaux
- Diviser un territoire
- Former des équipes
- Choisir un emplacement pour une infrastructure commune
- ...

Le problème de vote

Qui est le meilleur candidat ?



Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

OK... Mais comment fait-on en pratique ?

Quiz : Comment feriez-vous concrètement ?



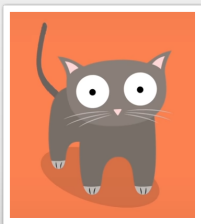
Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

OK... Mais comment fait-on en pratique ?

Quiz : Comment feriez-vous concrètement ?



Demandons à Albert...

<https://www.youtube.com/watch?v=vfTJ4vmIs04>



Le sondage d'Albert...

100 personnes votent pour le chat le plus cool du monde...



Le sondage d'Albert...

100 personnes votent pour le chat le plus cool du monde...

	Albert	Émilie	Oscar	Marine	Max
33 votes	1				
22 votes		1			
18 votes			1		
16 votes				1	
7 votes					1
4 votes					1



Le sondage d'Albert...

100 personnes votent pour le chat le plus cool du monde...

	Albert	Émilie	Oscar	Marine	Max
33 votes	1				
22 votes		1			
18 votes			1		
16 votes				1	
7 votes					1
4 votes					1

Quiz : Qui gagne ? Comment justifiez-vous votre choix ?



Le sondage d'Albert...

100 personnes votent pour le chat le plus cool du monde...

	Albert	Émilie	Oscar	Marine	Max
33 votes	1				
22 votes	5	1			
18 votes	5		1		
16 votes	5			1	
7 votes	5				1
4 votes	5				1



Le sondage d'Albert...

100 personnes votent pour le chat le plus cool du monde...

	Albert	Émilie	Oscar	Marine	Max
33 votes	1	5	4	2	3
22 votes	5	1	4	3	2
18 votes	5	2	1	4	3
16 votes	5	4	2	1	3
7 votes	5	2	4	3	1
4 votes	5	4	2	3	1

Quiz : Qui gagne ? Comment justifiez-vous votre choix ?



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour
- Scrutin majoritaire à 2 tours
- Vote alternatif
- Méthode de Borda
- Méthode de Condorcet



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours
- Vote alternatif
- Méthode de Borda
- Méthode de Condorcet



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Émilie**
- Vote alternatif
- Méthode de Borda
- Méthode de Condorcet



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Émilie**
- Vote alternatif : **Oscar**
- Méthode de Borda
- Méthode de Condorcet



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Émilie**
- Vote alternatif : **Oscar**
- Méthode de Borda : **Marine**
- Méthode de Condorcet



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Émilie**
- Vote alternatif : **Oscar**
- Méthode de Borda : **Marine**
- Méthode de Condorcet : **Max**



Le sondage d'Albert : le vainqueur

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Émilie**
- Vote alternatif : **Oscar**
- Méthode de Borda : **Marine**
- Méthode de Condorcet : **Max**

5 méthodes de vote, 5 vainqueurs...

Le blocage est donc total... (sic)

<https://whale.imag.fr/polls/viewPoll/f129915d-5ad3-4e83-9261-a6668efa8c84>



Quelle procédure ?

Alors, comment choisir une procédure de vote qui tient la route ?



Quelle procédure ?

Alors, comment choisir une procédure de vote qui tient la route ?

Tentons avec le scrutin majoritaire à deux tours (après tout, c'est utilisé presque dans toutes les élections politiques en France)



SM2T et monotonie

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	2	1	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1



SM2T et monotonie

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	2	1	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1



SM2T et monotonie

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	2	1	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice



SM2T et monotonie

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	2	1	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Carol



SM2T et monotonie

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	2	1	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
6 votes	1	2	3
2 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Carol

Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est pas monotone



SM2T et participation

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1



SM2T et participation

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 + 2 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1



SM2T et participation

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 + 2 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Carol



SM2T et participation

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol
Vainqueur : Carol

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 + 2 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob
Vainqueur : Alice



SM2T et participation

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol
Vainqueur : Carol

Situation finale :

	Alice	Bob	Carol
8 votes	1	2	3
4 + 2 votes	3	1	2
5 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob
Vainqueur : Alice

Le scrutin majoritaire à 2 tours ne vérifie pas la participation (les 2 électeurs additionnels auraient mieux fait de rester chez eux...)



SM2T et Condorcet

	Alice	Bob	Carol
$1/3 + \varepsilon$ votes	1	3	2
$1/3 + \varepsilon$ votes	3	1	2
$1/3 - 2\varepsilon$ votes	2	3	1



SM2T et Condorcet

	Alice	Bob	Carol
$1/3 + \varepsilon$ votes	1	3	2
$1/3 + \varepsilon$ votes	3	1	2
$1/3 - 2\varepsilon$ votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice



SM2T et Condorcet

	Alice	Bob	Carol
$1/3 + \varepsilon$ votes	1	3	2
$1/3 + \varepsilon$ votes	3	1	2
$1/3 - 2\varepsilon$ votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice

Pourtant, une majorité de $2/3 - \varepsilon$ d'électeurs préfère Carol à Alice et à Bob...



SM2T et Condorcet

	Alice	Bob	Carol
$1/3 + \varepsilon$ votes	1	3	2
$1/3 + \varepsilon$ votes	3	1	2
$1/3 - 2\varepsilon$ votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Alice

Pourtant, une majorité de $2/3 - \varepsilon$ d'électeurs préfère Carol à Alice et à Bob...

Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est (sévèrement) pas cohérent avec Condorcet.



SM2T et clones (1)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
48 votes	1	2	3
27 votes	2	1	3
25 votes	2	3	1



SM2T et clones (1)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
48 votes	1	2	3
27 votes	2	1	3
25 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol
24 votes	1	2	3	4
24 votes	2	1	3	4
27 votes	2	3	1	4
25 votes	2	3	4	1



SM2T et clones (1)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
48 votes	1	2	3
27 votes	2	1	3
25 votes	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol
24 votes	1	2	3	4
24 votes	2	1	3	4
27 votes	2	3	1	4
25 votes	2	3	4	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Alice



SM2T et clones (1)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
48 votes	1	2	3
27 votes	2	1	3
25 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Alice

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol
24 votes	1	2	3	4
24 votes	2	1	3	4
27 votes	2	3	1	4
25 votes	2	3	4	1

Finalistes : Bob + Carol

Vainqueur : Bob



SM2T et clones (1)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol
48 votes	1	2	3
27 votes	2	1	3
25 votes	2	3	1

Finalistes : Alice + Carol

Vainqueur : Alice

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol
24 votes	1	2	3	4
24 votes	2	1	3	4
27 votes	2	3	1	4
25 votes	2	3	4	1

Finalistes : Bob + Carol

Vainqueur : Bob

Le scrutin majoritaire à 2 tours est (très) sensible aux clones : les clones peuvent nuire.



SM2T et clones (2)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol	David
42	1	2	3	4
20	4	1	2	3
19	4	2	1	3
19	4	2	3	1



SM2T et clones (2)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol	David
42	1	2	3	4
20	4	1	2	3
19	4	2	1	3
19	4	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol	David
21	1	2	3	4	5
21	2	1	3	4	5
20	4	5	1	2	3
19	4	5	2	1	3
19	4	5	2	3	1



SM2T et clones (2)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol	David
42	1	2	3	4
20	4	1	2	3
19	4	2	1	3
19	4	2	3	1

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol	David
21	1	2	3	4	5
21	2	1	3	4	5
20	4	5	1	2	3
19	4	5	2	1	3
19	4	5	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Bob



SM2T et clones (2)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol	David
42	1	2	3	4
20	4	1	2	3
19	4	2	1	3
19	4	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Bob

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol	David
21	1	2	3	4	5
21	2	1	3	4	5
20	4	5	1	2	3
19	4	5	2	1	3
19	4	5	2	3	1

Finalistes : Alice + Anna

Vainqueur : Alice



SM2T et clones (2)

Situation initiale :

	Alice	Bob	Carol	David
42	1	2	3	4
20	4	1	2	3
19	4	2	1	3
19	4	2	3	1

Finalistes : Alice + Bob

Vainqueur : Bob

Situation finale :

	Alice	Anna	Bob	Carol	David
21	1	2	3	4	5
21	2	1	3	4	5
20	4	5	1	2	3
19	4	5	2	1	3
19	4	5	2	3	1

Finalistes : Alice + Anna

Vainqueur : Alice

Le scrutin majoritaire à 2 tours est (très) sensible aux clones : les clones peuvent aider.



SM2T et manipulation

	Alice	Bob	Carol	Donald
30 votes	1	3	2	4
33 votes	2	1	3	4
32 votes	3	2	1	4
5 votes	2	3	4	1



SM2T et manipulation

	Alice	Bob	Carol	Donald
30 votes	1	3	2	4
33 votes	2	1	3	4
32 votes	3	2	1	4
5 votes	2	3	4	1

Pour qui ont intérêt à voter les 5 derniers électeurs ?



SM2T et manipulation

	Alice	Bob	Carol	Donald
30 votes	1	3	2	4
33 votes	2	1	3	4
32 votes	3	2	1	4
5 votes	2	3	4	1

Pour qui ont intérêt à voter les 5 derniers électeurs ?

Le scrutin majoritaire à 2 tours est très facilement manipulable (cf vote utile)



SM2T : résumons...

Bon, donc, le scrutin majoritaire à 2 tours :

- n'est pas monotone
- ne satisfait pas la participation
- n'est sévèrement pas Condorcet-cohérent
- est très sensible aux clones
- est très facilement manipulable



SM2T : résumons...

Bon, donc, le scrutin majoritaire à 2 tours :

- n'est pas monotone
- ne satisfait pas la participation
- n'est sévèrement pas Condorcet-cohérent
- est très sensible aux clones
- est très facilement manipulable

D'autres problèmes potentiels :

- d'autres propriétés non vérifiées (e.g. renforcement)
- expressivité très limitée des électeurs (1 nom sur un bulletin)



SM2T : résumons...

Bon, donc, le scrutin majoritaire à 2 tours :

- n'est pas monotone
- ne satisfait pas la participation
- n'est sévèrement pas Condorcet-cohérent
- est très sensible aux clones
- est très facilement manipulable

D'autres problèmes potentiels :

- d'autres propriétés non vérifiées (e.g. renforcement)
- expressivité très limitée des électeurs (1 nom sur un bulletin)

Mais il a aussi quelques bonnes propriétés : facile à comprendre, facile à calculer et vérifier, faible complexité de communication, anonyme, neutre, satisfait l'unanimité...



Méthodes de vote et propriétés

Pour résumer :

- On peut s'appuyer sur des propriétés désirables pour choisir une procédure de vote qui convient
- Le scrutin majoritaire à 2 tours n'est peut-être pas le meilleur choix

Quelle est la meilleure procédure de vote ?



Deux propriétés raisonnables...

Prenons une méthode de vote qui renvoie un classement de l'ensemble des candidats.

- **Unanimité** : si tout le monde est d'accord pour dire que $a \succ b$, alors la méthode de vote classe aussi a au-dessus de b .
- **Indépendance aux alternatives non pertinentes** : le classement final de a et b selon la méthode de vote ne dépend **que** de la manière dont chaque électeur classe a et b .



Deux propriétés raisonnables...

Prenons une méthode de vote qui renvoie un classement de l'ensemble des candidats.

- **Unanimité** : si tout le monde est d'accord pour dire que $a \succ b$, alors la méthode de vote classe aussi a au-dessus de b .
- **Indépendance aux alternatives non pertinentes** : le classement final de a et b selon la méthode de vote ne dépend **que** de la manière dont chaque électeur classe a et b .

IANP, pas clair ? Voici un contre-exemple :

- Supposez que vous avez deux candidats a et b pour un poste dans votre équipe
- À l'issue des entretiens, vous concluez (collectivement) que a est le meilleur
- Un troisième candidat c arrive
- À l'issue de cet entretien avec c , vous concluez (collectivement) que b est meilleur que a .



Une propriété déraisonnable...

Prenons une méthode de vote qui renvoie un classement de l'ensemble des candidats.

- **Dictature** : il existe un électeur X tel que si X pense que $a \succ b$, alors la méthode de vote classe aussi a au-dessus de b .

En d'autres termes, la méthode de vote s'aligne exactement sur les préférences de X , sans prendre en compte les autres électeurs.



Une propriété déraisonnable...

Prenons une méthode de vote qui renvoie un classement de l'ensemble des candidats.

- **Dictature** : il existe un électeur X tel que si X pense que $a \succ b$, alors la méthode de vote classe aussi a au-dessus de b .

En d'autres termes, la méthode de vote s'aligne exactement sur les préférences de X , sans prendre en compte les autres électeurs.

C'est une **très mauvaise** propriété ! Qu'il faut absolument éviter !



Arrow

Pas de chance...

- **Théorème d'Arrow** (1951) :

Dès qu'il y a au moins 3 options, toute fonction d'agrégation satisfaisant l'**unanimité** et l'**indépendance aux alternatives non pertinentes** est forcément **dictatoriale**.

(NB : le choix social est pavé de théorèmes d'impossibilité de ce genre...)



Quelle procédure ?

- On ne peut pas tout avoir → il faut se focaliser sur les propriétés désirables que l'on souhaite : monotonie, unanimité, renforcement, résistance à la manipulation, indépendance aux clones...
- Expression des bulletins : uninominal ? approbation ? ordre ? note ?
- Compréhensibilité de la procédure (bulletins + calcul du vainqueur)

Méthode	Satis										Non										Satis									
	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major	Major
Approval	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Borda count	No	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Bucklin	Yes	Yes	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Copeland	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
IRV (AV)	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Kemeny-Young	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Highest median/Quincy judgment ^[1]	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Minimax	Yes	No	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Plurality/PTP	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Score voting	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Ranked pairs	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Runoff voting	Yes	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Schulze	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
STAR voting	No	Yes	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Sortition, arbitrary winner ^[2]	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
Random ballot ^[3]	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No

https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_electoral_systems



Source : FabCaro (2019) *Open Bar 1ère Tournée*. Delcourt



Le vote de comité...

Nous avons parlé jusqu'ici du vote à vainqueur unique.

Autre problème de vote similaire, mais pas tant que ça : le vote de comité



Le vote de comité...

Nous avons parlé jusqu'ici du vote à vainqueur unique.

Autre problème de vote similaire, mais pas tant que ça : le vote de comité

Problème n°2 : le vote de comité

Nous devons élire un **ensemble** de représentants parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

- Options : **sous-ensembles** de candidats (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote



Un exemple simplifié¹

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$



Un exemple simplifié¹

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H



Un exemple simplifié¹

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Quiz : Mettons que nous devons élire un comité de 4 candidats. Qui gagne ? Comment justifiez-vous votre choix ?



Objectif possible : excellence

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : recruter 4 ouvriers pour un travail. Nous voulons les meilleurs.



Objectif possible : excellence

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : recruter 4 ouvriers pour un travail. Nous voulons les meilleurs.

Vainqueurs : $\{A, B, C, D\}$



Objectif possible : proportionnalité

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : élire une assemblée de 4 membres, représentative du peuple



Objectif possible : proportionnalité

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : élire une assemblée de 4 membres, représentative du peuple

Vainqueurs : $\{A, B, C, E\}$



Objectif possible : diversité

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : choisir l'emplacement de 4 infrastructures vitales (e.g. défibrillateur)



Objectif possible : diversité

Candidats : $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

Préférences :

Nombre d'électeurs	73	23	2	2
Approbations	A, B, C, D	E, F	G	H

Scénario : choisir l'emplacement de 4 infrastructures vitales (e.g. défibrillateur)

Vainqueurs : $\{A, E, G, H\}$



Quelques exemples de règles de comité

- **Excellence** : k -meilleurs, règles single-winner itérées, règles Condorcet.
- **Proportionnalité** : Proportional Approval Voting (PAV), Single Transferrable Vote(STV), Monroe.
- **Diversité** : Borda ou Approval Chamberlin-Courant

(NB : un certain nombre de ces règles sont des Committee Scoring rules)