Une courte introduction au choix social
Partage équitable d'objets

Sylvain Bouveret
LIG – Univ. Grenoble-Alpes

CED Cours transversal Sciences Environnement Sociétés

Grenoble, 31 mai 2021

Le problème de partage

Comment le résoudre ?

Le problème de partage...

Le problème de partage...



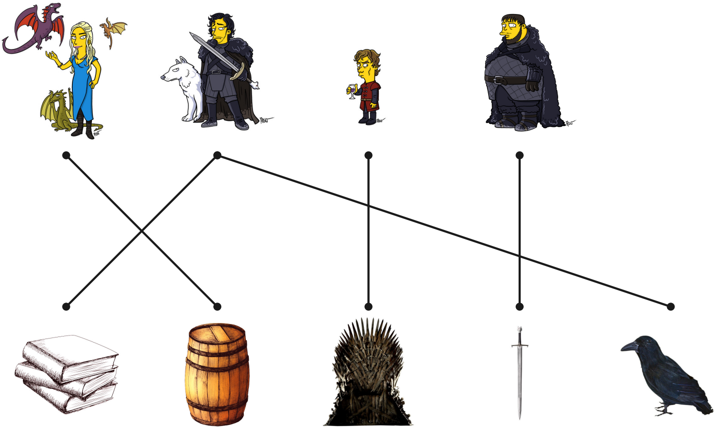

Le problème de partage...








Le problème de partage...



Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...

Quiz : Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...

Quiz : Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

- un partage qui prend en compte les préférences des agents pour les satisfaire au mieux
- un partage qui traite chacun de manière équitable
- un partage qui ne sous-exploite pas la ressource (qui donne les objets à ceux qui les veulent vraiment)

Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...

Quiz : Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

- un partage qui prend en compte les préférences des agents pour les satisfaire au mieux
- un partage qui traite chacun de manière équitable
- un partage qui ne sous-exploite pas la ressource (qui donne les objets à ceux qui les veulent vraiment)

Point crucial sous-jacent : il faut que les agents expriment leurs **préférences**.

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer des **lots** d'objets ?

$\rightsquigarrow$ *e.g* $abc \overset{?}{\prec\succ} ab$; $ab \overset{?}{\prec\succ} ac$?

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer des **lots** d'objets ?

$\leadsto$ *e.g* $abc \overset{?}{\prec\succ} ab$; $ab \overset{?}{\prec\succ} ac$?

$\rightarrow$ En fait, on a besoin de comparer les éléments de $2^{\mathcal{O}}$ (pas seulement ceux de $\mathcal{O}$).

Espaces combinatoires...

Le piège combinatoire...

Deux objets...

$o_1 \succ o_2 \succ o_1 o_2 \succ \emptyset \rightarrow 3$ comparaisons.

Espaces combinatoires...

Le piège combinatoire...

Quatre objets...

$o_1 o_2 \succ o_2 o_3 o_4 \succ o_1 \succ \emptyset \succ o_2 \succ o_1 o_2 o_3 o_4 \succ o_1 o_3 \succ o_2 o_4 \succ o_3 o_4 \succ o_1 o_4 \succ o_1 o_3 o_4 \succ o_2 o_3 \succ o_4 \succ o_3 \succ o_1 o_2 o_4 \succ o_1 o_2 o_3 \rightarrow$ 15 comparaisons.

Espaces combinatoires. . .

Le piège combinatoire. . .

Vingt objets. . .

$o_8 o_5 \succ o_5 o_3 o_9 \succ o_8 \succ \emptyset \succ o_5 \succ o_8 o_5 o_3 o_9 \succ o_8 o_3 \succ o_5 o_9 \succ o_3 o_9 \succ$
$o_8 o_9 \succ o_8 o_3 o_9 \succ o_5 o_3 \succ o_9 \succ o_3 \succ o_8 o_5 o_9 \succ o_8 o_5 o_3 o_1 o_2 o_5 o_8 o_9 \succ$
$o_1 o_5 o_6 \succ o_7 \succ o_2 o_3 o_4 o_5 o_6 o_7 o_8 \succ o_1 o_2 o_3 o_4 o_5 \succ o_1 o_3 \succ o_2 \succ o_1 o_3 o_7 o_9 \succ$
$o_1 o_5 \succ o_1 o_7 o_8 o_9 \succ o_2 \succ o_4 \succ o_6 \succ o_1 o_7 \succ o_1 o_2 o_3 \succ o_1 o_2 \succ o_2 o_5 o_4 \succ$
$o_1 \succ o_2 \succ o_1 o_2 o_5 o_4 \succ o_1 o_5 \succ o_2 o_4 \succ o_5 o_4 \succ o_1 o_4 \succ o_1 o_5 o_4 \succ o_2 o_5 \succ$
$o_4 \succ o_5 \succ o_1 o_2 o_4 \succ o_1 o_2 o_5 \succ o_1 o_5 \succ o_5 o_3 o_9 \succ o_1 \succ \emptyset \succ o_5 \succ$
$o_1 o_5 o_3 o_9 \succ o_1 o_3 \succ o_5 o_9 \succ o_3 o_9 \succ o_1 o_9 \succ o_1 o_3 o_9 \succ o_5 o_3 \succ o_9 \succ$
$o_3 \succ o_1 o_5 o_9 \succ o_1 o_5 o_3 o_9 o_6 o_5 o_1 o_9 \succ o_9 o_5 o_6 \succ o_7 \succ o_6 o_3 o_4 o_5 o_6 o_7 o_1 \succ$
$o_9 o_6 o_3 o_4 o_5 \succ o_9 o_3 \succ o_6 \succ o_9 o_3 o_7 o_9 \succ o_9 o_5 \succ o_9 o_7 o_1 o_9 \succ o_6 \succ o_4 \succ$
$o_6 \succ o_9 o_7 \succ o_9 o_6 o_3 \succ o_9 o_6 \succ o_6 o_5 o_4 \succ o_9 \succ o_6 \succ o_9 o_6 o_5 o_4 \succ o_9 o_5 \succ$
$o_6 o_4 \succ o_5 o_4 \succ o_3 o_4 \succ$

$\rightarrow$ 1048575 comparaisons $\rightarrow$ l'élicitation nécessite plus de 12 jours !

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Solutions possibles...

1. **Restreindre** ce qu'il est possible d'exprimer, et compléter ce qui manque en se servant d'hypothèses implicites
2. Utiliser des **langages de représentation compacte**

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Solutions possibles...

1. **Restreindre** ce qu'il est possible d'exprimer, et compléter ce qui manque en se servant d'hypothèses implicites
2. Utiliser des **langages de représentation compacte**

Des exemples de langages compacts (inventés par les chercheurs en IA majoritairement...)

- **Préférences numériques** : logique propositionnelle pondérée, langages d'enchères, GAI-nets, fonctions k-additives...
- **Préférences ordinales** : Bases de buts priorisés, CI-nets...

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer les **lots** d'objets ?

$\rightsquigarrow$ *e.g* $abc \overset{?}{\prec\succ} ab$; $ab \overset{?}{\prec\succ} ac$?

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer les **lots** d'objets ?

$$\rightsquigarrow \textit{e.g } abc \overset{?}{\prec\succ} ab \,;\, ab \overset{?}{\prec\succ} ac\,?$$

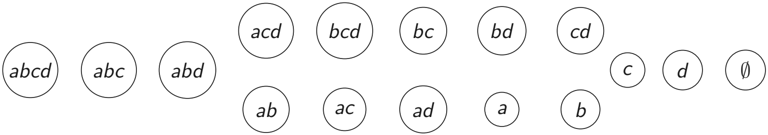
1 | On suppose la **monotonie** $\rightsquigarrow$ *e.g* $abc \succ ab$.

2 | On suppose la **responsiveness** : si $(X \cup Y) \cap Z = \emptyset$ alors $X \succ Y$ ssi $X \cup Z \succ Y \cup Z$.

$$\rightsquigarrow \textit{e.g } ab \succ ac.$$

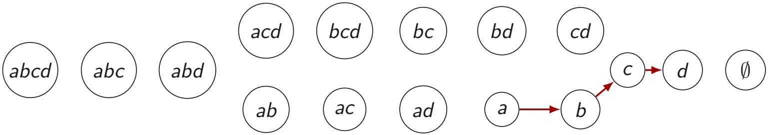
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



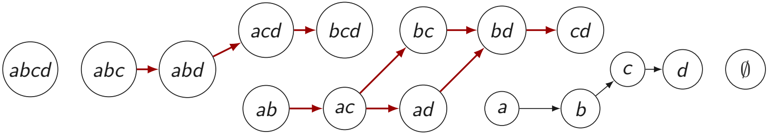
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



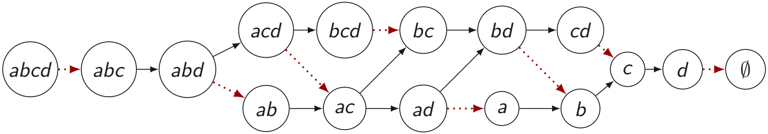
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



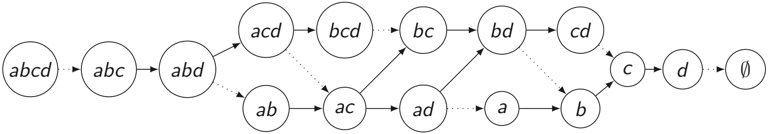
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



Example

- $\mathcal{A} : a \triangleright b \triangleright c \triangleright d$
- Responsiveness
- Monotonie



Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

- Très simple
- Mais ne permet pas de tout exprimer (compléments, substituts...)

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

- Très simple
- Mais ne permet pas de tout exprimer (compléments, substituts...)

Pour la suite de l'exposé, nous nous placerons dans ce modèle à préférences additives.

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$

o_1 o_2 o_3

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$

	o_1	o_2	o_3
agent 1			
agent 2			

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j) .

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

$$u_2(\{2,3\}) = 1 + 6 = 7$$

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\to w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\to u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

- une **allocation complète** $\overrightarrow{\pi} : \mathcal{A} \to 2^{\mathcal{O}}$...

	o_1	o_2	o_3
agent 1	**5**	4	2
agent 2	4	**1**	**6**

$\overrightarrow{\pi} = \langle \{1\}, \{2, 3\} \rangle$

- $u_1(\overrightarrow{\pi}) = 5$
- $u_2(\overrightarrow{\pi}) = 7$

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

- une **allocation complète** $\overrightarrow{\pi} : \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{O}}$...
- ...prenant en compte les préférences des agents

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

$\overrightarrow{\pi} = \langle \{1\}, \{2, 3\} \rangle$

- $u_1(\overrightarrow{\pi}) = 5$
- $u_2(\overrightarrow{\pi}) = 7$

Qu’est-ce qu’un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Qu'est-ce qu'un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Mais qu'est-ce qu'un bon partage devrait faire avec ces préférences ?

Qu'est-ce qu'un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Mais qu'est-ce qu'un bon partage devrait faire avec ces préférences ?

Les économistes ont deux réponses classiques :

1. maximiser une utilité collective définie par une **fonction d'utilité collective**
2. satisfaire un **critère d'équité**

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Égalitarisme** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Égalitarisme** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Produit de Nash** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \prod_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$
$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Évaluation égalitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = \min(5, 4 + 6) = 5$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Évaluation égalitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = \min(5, 4 + 6) = 5$

$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = \min(5 + 3, 6) = 6$

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

- **Absence d'envie** : Une allocation $\overrightarrow{\pi}$ est **sans envie** si aucun n'agent n'envie un autre.

Formellement : $\forall i, j,\ u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi_j)$

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

- **Absence d'envie** : Une allocation $\vec{\pi}$ est **sans envie** si aucun n'agent n'envie un autre.

Formellement : $\forall i, j,\ u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi_j)$

- **Juste part proportionnelle** : La juste part proportionnelle d'un agent i est égale à :

$$u_i^{\mathrm{PFS}} = \frac{u_i(\mathcal{O})}{n} = \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{w_i(j)}{n}$$

  Une allocation $\vec{\pi}$ satisfait **la juste part (proportionelle)** ssi tous les agents ont au moins leur juste part.

- Idée sous-jacente : chaque agent a droit au moins au $n^{\text{ème}}$ du gâteau...

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\vec{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Juste part proportionnelle :

$\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas la juste part (l'agent 1 obtient $5 < 5.5$)

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Juste part proportionnelle :

$\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas la juste part (l'agent 1 obtient $5 < 5.5$)

$\overrightarrow{\pi}'$ satisfait la juste part

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Quiz : Mais comment diantre calculer un bon partage ?

L'allocation centralisée

Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.

L'allocation centralisée

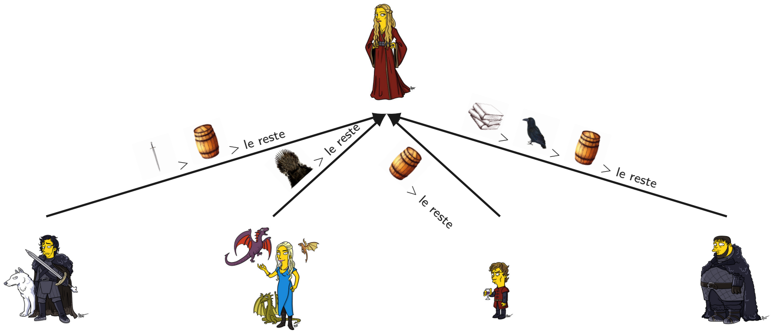
Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.

L'allocation centralisée

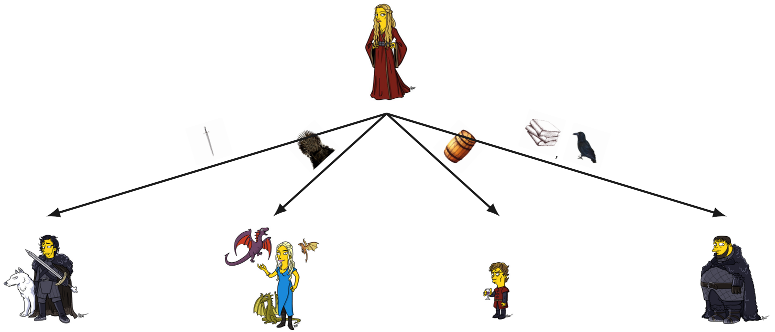
Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.



L'allocation centralisée

Approche n°1 : l'allocation centralisée
Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.



L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)
- Confiance en l'autorité centrale

L’allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l’élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)
- Confiance en l’autorité centrale
- Manipulation de la procédure

L'allocation distribuée

Approche n°2 : l'allocation distribuée
Partir d'un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.

L’allocation distribuée

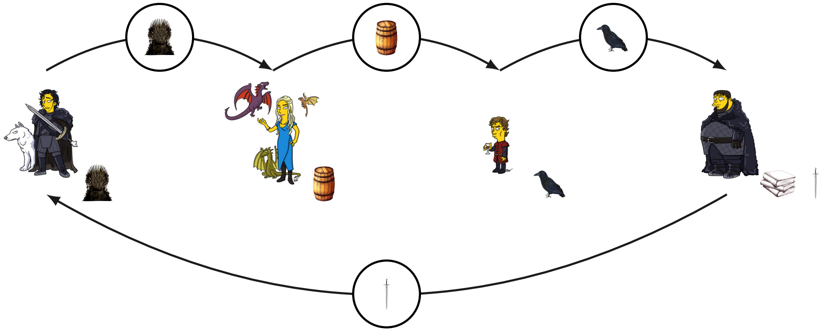
Approche n°2 : l’allocation distribuée

Partir d’un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.

L'allocation distribuée

Approche n°2 : l'allocation distribuée

Partir d'un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.



Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués
  - rationels

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués
  - rationels
  - ...

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas
- Bonne nouvelle : toute séquence d'échanges localement rationnels aboutiront forcément à l'optimum social utilitariste

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas
- Bonne nouvelle : toute séquence d'échanges localement rationnels aboutiront forcément à l'optimum social utilitariste
- Mauvaise nouvelle :
  - Cette séquence d'échanges peut être exponentiellement longue...
  - Si l'on impose une quelconque restriction sur les types d'échanges autorisés (*e.g.* nombre de ressources), cette propriété n'est plus vraie.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.








L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L’allocation séquentielle

Approche n°3 : l’allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

Allocation séquentielle

Entre l'allocation centralisée et l'allocation distribuée, une procédure très simple...

Allocation séquentielle

Entre l'allocation centralisée et l'allocation distribuée, une procédure très simple...

Demander aux agents de choisir chacun à leur tour (selon une **séquence prédéterminée**) leur objet préféré parmi ceux qu'il reste.

Exemple

3 agents A, B, C, 6 objets, séquence $ABCCBA \rightarrow A$ choisit d'abord (et prend son objet préféré), ensuite vient B, puis C, puis C à nouveau, etc. . .

Allocation séquentielle

- Protocole simple et naturel
- Utilisé en pratique
- Sans élicitation de préférence

- Jeux de plateau
- Draft (sport)
- Allocation de cours à des étudiants (Harvard Business School)
- ...

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, *ABCCBA* semble **plus équitable** que *AABBCC*. . .

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\dots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.

Quelques problèmes intéressants

- Meilleure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.
Égalitarisme :

p	$n = 2$	$n = 3$
4	ABBA	ABCC
5		
6		
8		
10		

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, *ABCCBA* semble **plus équitable** que *AABBCC*...

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.

Égalitarisme :

p	$n = 2$	$n = 3$
4	ABBA	ABCC
5	AABBB	ABCCB
6		
8		
10		

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC$...

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.
Égalitarisme :

p	$n = 2$	$n = 3$
4	ABBA	ABCC
5	AABBB	ABCCB
6	ABABBA	ABCCBA
8	ABBABAAB	AACCBBCB
10	ABBAABABBA	ABCABBCACC

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- $B : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- $B : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Que se passe-t-il si A connaît les préférences de B et s'en sert à son profit ?

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- $B : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Que se passe-t-il si A connaît les préférences de B et s'en sert à son profit ?

Il peut manipuler en choisissant 2 à la place de 1 au premier tour $\rightarrow$ $\{12|34\}$.

Manipulation coalitionnelle

Exemple

3 agents, 6 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 6$
- $B : 1 \succ 3 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$
- $C : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1 \succ 5 \succ 6$

Sequence $\pi = ABCABC \rightarrow \{15|34|26\}$.

Manipulation coalitionnelle

Exemple

3 agents, 6 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 6$
- $B : 1 \succ 3 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$
- $C : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1 \succ 5 \succ 6$

Sequence $\pi = ABCABC \rightarrow \{15|34|26\}$.

- Si A et B manipulent seuls, il ne peuvent pas obtenir mieux
- S'ils coopèrent, il peuvent obtenir $\{12|35|46\}$, ce qui est strictement meilleur