

Un modèle général et des résultats de complexité pour le partage de biens indivisibles

Sylvain Bouveret, Hélène Fargier, Jérôme Lang et Michel
Lemaître

ONERA / IRIT / CNES / SUPAERO

le 27 mai 2005

Le problème de partage

Le problème de partage de ressources se rencontre dans de nombreuses applications industrielles :

- partage d'un réseau de télécommunication,
- partage d'un banc d'expérimentation,
- partage d'une constellation de satellites,
- ...

Il peut s'énoncer intuitivement comme suit :

Comment partager au mieux la ressource entre plusieurs agents ?

Plus formellement...

Un problème de partage \mathcal{P} est un problème d'optimisation ou de décision.

Entrées :

- n agents.
- Une ressource commune **limitée**.
- Un langage commun d'expression des préférences et les préférences des n agents sur la ressource.
- Des contraintes sur la ressource.
- Un critère d'optimisation ou de décision.

Sortie :

Une allocation d'une partie de la ressource à chaque agent (parts) qui vérifie les contraintes et qui optimise ou vérifie le critère.

Partage de biens indivisibles

- Nous nous intéressons ici au partage de biens **indivisibles** (des objets).
- Nous introduirons un modèle de ce problème, ainsi que quelques résultats de complexité.
- Ce problème est motivé par une application concrète.

Un modèle général et des résultats de complexité pour le partage de biens indivisibles

- 1 Un modèle du problème de partage
- 2 Quelques résultats de complexité
- 3 Une application concrète

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des agents

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des **agents**

- Ensemble d'**agents** $N = \{1, \dots, n\}$.

Agents, objets et partage

Partage de **biens indivisibles** entre des agents

- Ensemble d'**agents** $N = \{1, \dots, n\}$.
- Ensemble d'**objets** \mathcal{O} (un **lot** est un sous-ensemble de \mathcal{O}).

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des agents

- Ensemble d'agents $N = \{1, \dots, n\}$.
- Ensemble d'objets \mathcal{O} (un lot est un sous-ensemble de \mathcal{O}).
- Partage $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (x_i est la part de l'agent i).

Contraintes et partages admissibles

Un certain nombre de **contraintes** potentielles restreignent l'ensemble des partages possibles (partages **admissibles**) :

- contraintes de préemption,
- contraintes d'exclusion,
- contraintes de volume,
- ...

Expression des contraintes

Un langage propositionnel $L_{\mathcal{O}}^{alloc}$:

- ensemble des symboles propositionnels $\{alloc(o, i) \mid o \in \mathcal{O}, i \in N\}$.
- ensemble des connecteurs usuels \neg, \wedge, \vee

Définition [Contrainte]

Une contrainte est une formule de $L_{\mathcal{O}}^{alloc}$.

Exemple

La contrainte de préemption s'exprime :

$$\neg(alloc(o, i) \wedge alloc(o, j)) \mid i, j \in N, i \neq j$$

Expression des préférences

Comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?

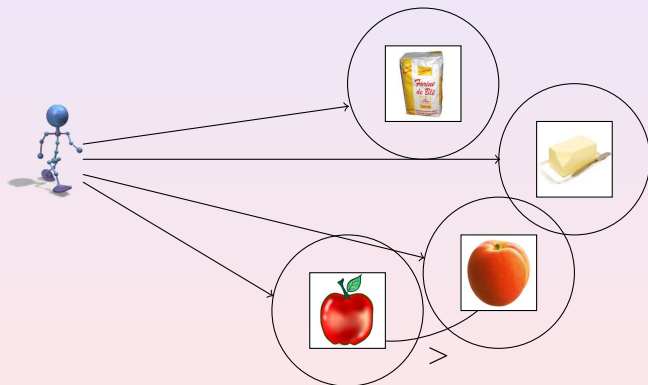
Expression des préférences

Comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?



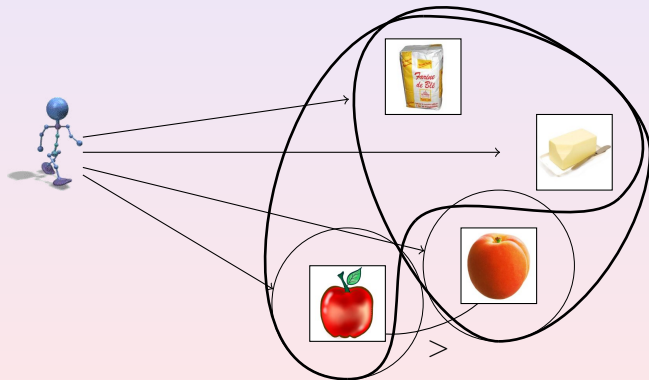
Expression des préférences

Comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?



Expression des préférences

Comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?



Expression des préférences

Comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?

- Besoin d'exprimer des **dépendances préférentielles** entre objets.
- Impossibilité pour un agent d'exprimer explicitement ses préférences sur l'ensemble des lots qu'il peut recevoir.
- \leadsto Nécessité d'un **langage compact de représentation de préférences**.

Un langage à base de logique et de poids

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{ \textit{farine}, \textit{beurre}, \textit{pommes}, \textit{abricots} \},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\textit{pommes} \vee \textit{abricots},$
 - $\textit{farine} \wedge \textit{beurre} \wedge (\textit{pommes} \vee \textit{abricots}),$
 - $\textit{pommes},$

Un langage à base de logique et de poids

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{ \textit{farine}, \textit{beurre}, \textit{pommes}, \textit{abricots} \},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\langle \textit{pommes} \vee \textit{abricots}, 3 \rangle,$
 - $\langle \textit{farine} \wedge \textit{beurre} \wedge (\textit{pommes} \vee \textit{abricots}), 5 \rangle,$
 - $\langle \textit{pommes}, 2 \rangle,$

Un langage à base de logique et de poids

Un peu plus formellement :

- Un langage propositionnel $L_{\mathcal{O}}$. . .
 - ensemble des symboles propositionnels \mathcal{O} ,
 - ensemble des connecteurs usuels \neg, \wedge, \vee
- . . . et des poids $w \in \mathbb{N}$.

Dans la suite, on se limitera à $L_{\mathcal{O}}^+$, l'ensemble des formules non négatives de $L_{\mathcal{O}}$ (l'obtention d'un objet n'a pas d'influence « négative »).

Utilité individuelle

L'utilité individuelle d'un agent exprime sa satisfaction vis-à-vis d'un partage. Elle dépend :

- de la part qu'il obtient dans le partage (et uniquement de sa part),
- des demandes pondérées qu'il a formulées.

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{\textit{farine}, \textit{beurre}, \textit{pommes}, \textit{abricots}\},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\langle \textit{pommes} \vee \textit{abricots}, 3 \rangle,$
 - $\langle \textit{farine} \wedge \textit{beurre} \wedge (\textit{pommes} \vee \textit{abricots}), 5 \rangle,$
 - $\langle \textit{pommes}, 2 \rangle,$

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$x_1 = \{\textit{abricots}, \textit{farine}, \textit{beurre}\} \Rightarrow$$

$$u_1(\mathbf{x}) = \overset{\textit{pommes} \vee \textit{abricots}}{3}$$

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{ \text{farine}, \text{beurre}, \text{pommes}, \text{abricots} \},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\langle \text{pommes} \vee \text{abricots}, 3 \rangle,$
 - $\langle \text{farine} \wedge \text{beurre} \wedge (\text{pommes} \vee \text{abricots}), 5 \rangle,$
 - $\langle \text{pommes}, 2 \rangle,$

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$x_1 = \{ \text{abricots}, \text{farine}, \text{beurre} \} \Rightarrow$$

$$u_1(\mathbf{x}) = 3 + \underset{5}{\text{farine} \wedge \text{beurre} \wedge (\text{pommes} \vee \text{abricots})}$$

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{\textit{farine}, \textit{beurre}, \textit{pommes}, \textit{abricots}\},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\langle \textit{pommes} \vee \textit{abricots}, 3 \rangle,$
 - $\langle \textit{farine} \wedge \textit{beurre} \wedge (\textit{pommes} \vee \textit{abricots}), 5 \rangle,$
 - $\langle \textit{pommes}, 2 \rangle,$

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$x_1 = \{\textit{abricots}, \textit{farine}, \textit{beurre}\} \Rightarrow$$

$$u_1(\mathbf{x}) = 3 + 5 + \overset{\textit{pommes}}{0} = 8$$

Utilité individuelle

Définition [utilité individuelle]

Étant donné un agent i , son ensemble de demandes pondérées Δ_i , et un partage \mathbf{x} , l'utilité individuelle de i s'exprime comme suit :

$$u_i(\mathbf{x}) = f(\{w^i \mid \langle \varphi, w \rangle \in \Delta_i \text{ et } x_i \models \varphi\}),$$

avec f une fonction non-décroissante, commutative et associative sur \mathbb{N} .

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- $\mathcal{O} = \{\textit{farine}, \textit{beurre}, \textit{pommes}, \textit{abricots}\},$
- Demandes de l'agent 1 :
 - $\langle \textit{pommes} \vee \textit{abricots}, 3 \rangle,$
 - $\langle \textit{farine} \wedge \textit{beurre} \wedge (\textit{pommes} \vee \textit{abricots}), 5 \rangle,$
 - $\langle \textit{pommes}, 2 \rangle,$

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$x_1 = \{\textit{abricots}, \textit{farine}, \textit{beurre}\} \Rightarrow$$

$$u_1(\mathbf{x}) = f(3, 5)$$

Utilité collective

L'utilité collective (la satisfaction globale de la société d'agents) s'exprime comme une agrégation des utilités individuelles.

Définition [Utilité collective]

Étant donné un partage \mathbf{x} , un ensemble d'agents N et leurs utilités individuelles,

$$uc(\mathbf{x}) = g(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})),$$

avec g une fonction commutative et non-décroissante de \mathbb{N}^n dans \mathbb{N} .

Les deux niveaux d'agrégation

Le calcul de l'utilité collective passe donc par deux niveaux d'agrégation :

$$\left. \begin{array}{l} w_1^1, \dots, w_{p_1}^1 \xrightarrow{f} u_1 \\ \vdots \\ w_1^n, \dots, w_{p_n}^n \xrightarrow{f} u_n \end{array} \right\} \xrightarrow{g} u_C.$$

~> Quelles fonctions pertinentes peut-on choisir pour f et g ?

Exemples de fonctions f et g

- Pour les utilités individuelles :
 - $f = +$ (choix le plus évident),
 - $f = \max$ (dans le cas où les agents ne veulent qu'un seul objet),
- Pour l'utilité collective :
 - $g = +$ (utilitarisme \rightsquigarrow *sum-fitness*, productivisme),
 - $g = \min$ (égalitarisme \rightsquigarrow équité)

Possibilité de familles de fonctions intermédiaires (moyennes pondérées ordonnées, somme des exposants, ...).

Le problème de partage

En résumé :

Instance du problème de partage

Une instance du problème de partage consiste en :

- un ensemble fini d'agents $N = \{1, \dots, n\}$ exprimant des demandes pondérées Δ_i ,
- un ensemble fini d'objets \mathcal{O} ,
- un ensemble fini de contraintes \mathcal{C} ,
- un couple de fonctions d'agrégation (f, g) .

Le résultat d'un problème de partage est un partage admissible qui maximise l'utilité collective.

Un modèle général et des résultats de complexité pour le partage de biens indivisibles

- 1 Un modèle du problème de partage
- 2 Quelques résultats de complexité**
- 3 Une application concrète

Partage de biens indivisibles

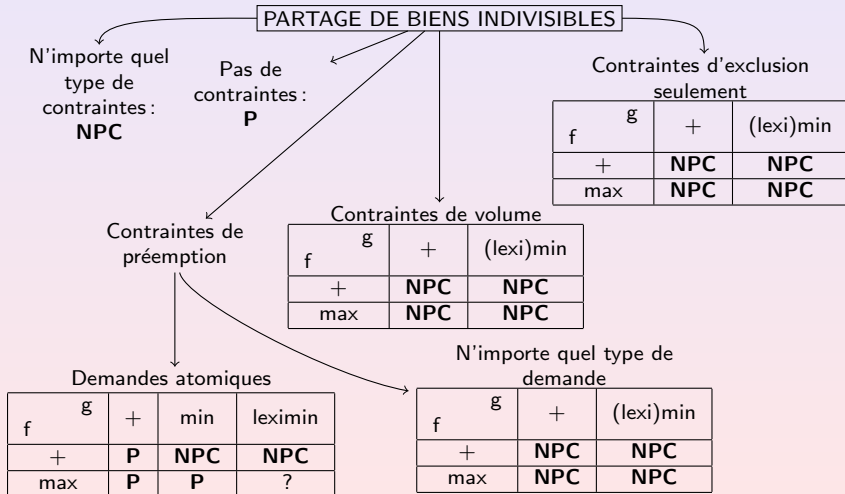
On s'intéresse à la complexité du problème suivant :

Définition [PARTAGE DE BIENS INDIVISIBLES]

Étant donné une instance du problème de partage et un entier K , existe-t-il un partage admissible \mathbf{x} tel que $uc(\mathbf{x}) \geq K$?

Ce problème est dans **NP**.

Les résultats de complexité obtenus



Un modèle général et des résultats de complexité pour le partage de biens indivisibles

- 1 Un modèle du problème de partage
- 2 Quelques résultats de complexité
- 3 Une application concrète**

Une constellation de satellites...

- Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (en raison de son coût).



Une constellation de satellites . . .

- Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (en raison de son coût).
- Chaque agent (agences civiles et militaires de chaque pays) envoie des demandes d'images à prendre, simples ou complexes (stéréo, tri-stéréo. . .).
- Chaque jour, le Centre de Programmation sélectionne les demandes qui seront satisfaites le lendemain et allouées aux agents.
- L'exploitation doit être :
 - **efficace** \rightsquigarrow la constellation ne doit pas être sous-exploitée,
 - **équitable** \rightsquigarrow chaque agent attend un « retour sur investissement » en rapport avec sa contribution financière.

Expression de l'application dans le modèle précédent

- Les agents : agences militaires et civiles de chaque pays.
- La ressource : l'exploitation du satellite (objets \rightsquigarrow demandes d'images).
- Préférences : langage d'expression des demandes pondérées (possibilité d'expression de demandes complexes).
- Contraintes : contraintes physiques (fenêtres temporelles, temps de transition, images particulières — stéréo, . . . —, mémoire, énergie, . . .), **mais pas de contrainte de préemption.**
- Fonctions d'agrégation :
 - $f = +$.
 - $g = \min$ (ou leximin), pour assurer l'équité du partage.

Quelques autres questions posées par l'application

- Droits d'accès à la ressource différent selon les entités (proportionnel à l'investissement financier par exemple).
- Normalisation des utilités individuelles nécessaires (due au fait que les agents fixent les poids de manière arbitraire).
- Possibilité de régulation temporelle.

Travaux proches

- Choix social :
 - en général, partage équitable de biens divisibles,
 - quelques travaux concernant le partage de biens indivisibles,
 - souvent un manque de langage de représentation compacte.
- Enchères combinatoires :
 - de nombreux langages de lots (lots — prix),
 - un contexte purement utilitariste \leadsto on ne se préoccupe pas d'équité entre agents.
- Négociation multilatérale :
 - un point de vue décentralisé,
 - les agents négocient l'échange d'objets à partir d'un partage initial.

Conclusion

Nous avons introduit :

- un modèle de partage de biens indivisibles autorisant différents critères,
- des résultats de complexité pour ce modèle,
- une application concrète pour laquelle ce modèle fonctionne.

Travail en cours :

- introduction de droits inégaux dans les partages,
- algorithmique relative à ce modèle,
- étude des possibilités de manipulations.