

# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

---

Sylvain Bouveret et Michel Lemaître

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
Centre National d'Études Spatiales (CNES)  
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (IRIT)  
**Toulouse – France**

---

4<sup>èmes</sup> journées francophones Modèles Formels de l'Interaction  
Paris, 30 mai – 1<sup>er</sup> juin 2007

## Des problèmes de décision collective...

- L'exploitation d'une ressource industrielle cofinancée par plusieurs entités doit être partagée entre ces entités, chacune espérant un retour sur investissement en rapport avec sa contribution financière.
- Un bien de consommation doit être réparti entre plusieurs populations de tailles différentes.
- Un ensemble de représentants de circonscriptions de tailles différentes doit être désigné pour un comité de taille fixée.
- L'actif — inférieur aux dettes — d'une société en faillite doit être réparti entre ses créanciers, auxquels l'entreprise doit des montants différents.

Tous ces problèmes font intervenir des agents qui comptent **de manière inégale** dans la décision collective.

## Des problèmes de décision collective...

- L'exploitation d'une ressource industrielle cofinancée par plusieurs entités doit être partagée entre ces entités, chacune espérant un retour sur investissement en rapport avec sa contribution financière.
- Un bien de consommation doit être réparti entre plusieurs populations de tailles différentes.
- Un ensemble de représentants de circonscriptions de tailles différentes doit être désigné pour un comité de taille fixée.
- L'actif — inférieur aux dettes — d'une société en faillite doit être réparti entre ses créanciers, auxquels l'entreprise doit des montants différents.

Tous ces problèmes font intervenir des agents qui comptent **de manière inégale** dans la décision collective.

# La question du jour

La théorie de l'utilitarisme permet de modéliser de manière crédible les problèmes de prise de décision collective, en introduisant les notions d'**utilité individuelle** et de **fonction d'utilité collective**. Cependant, dans un tel modèle les agents sont considérés comme **égaux** devant la décision collective.

## La question

Dans de nombreux problèmes, les agents ne doivent pas avoir le même poids dans la décision collective, pour une raison extérieure (**droit exogène**).

Comment introduire la notion d'inégalité des agents dans la procédure de prise de décision ?

## La question du jour

La théorie de l'utilitarisme permet de modéliser de manière crédible les problèmes de prise de décision collective, en introduisant les notions d'**utilité individuelle** et de **fonction d'utilité collective**. Cependant, dans un tel modèle les agents sont considérés comme **égaux** devant la décision collective.

### La question

Dans de nombreux problèmes, les agents ne doivent pas avoir le même poids dans la décision collective, pour une raison extérieure (**droit exogène**).

Comment introduire la notion d'inégalité des agents dans la procédure de prise de décision ?

# Le menu du jour

- 1 Le principe de duplication étendu**
  - Cadre formel
  - Principe de duplication des agents
  - CUF à droits inégaux
- 2 Propriétés des droits inégaux**
  - Propriétés classiques étendues
  - Nouvelles propriétés
  - Propriétés des CUF introduites
- 3 Applications**
- 4 Droits inégaux ordinaux**

# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

## 1 Le principe de duplication étendu

- Cadre formel
- Principe de duplication des agents
- CUF à droits inégaux

## 2 Propriétés des droits inégaux

- Propriétés classiques étendues
- Nouvelles propriétés
- Propriétés des CUF introduites

## 3 Applications

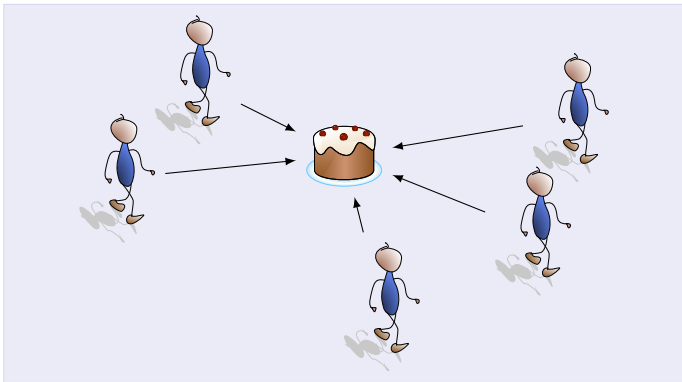
## 4 Droits inégaux ordinaux

# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .

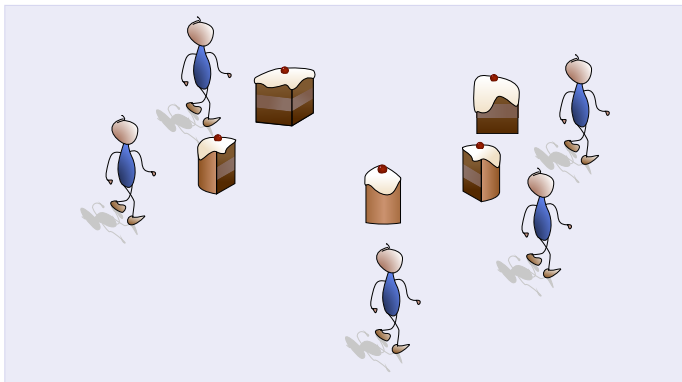
# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .



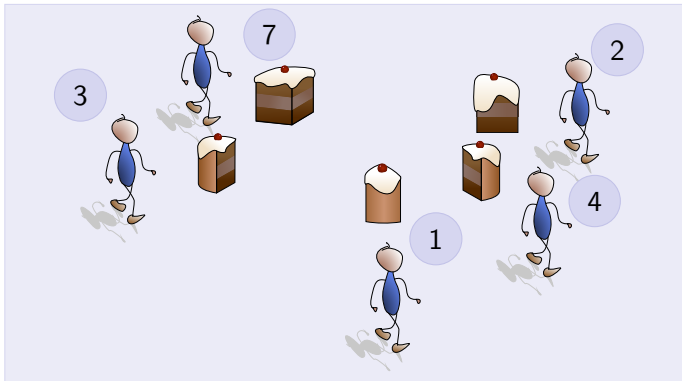
# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .



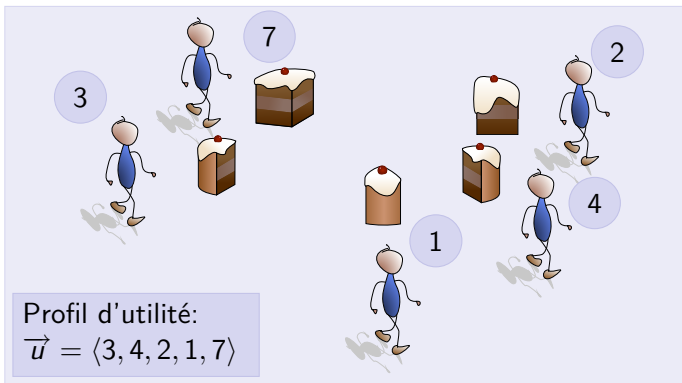
# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .



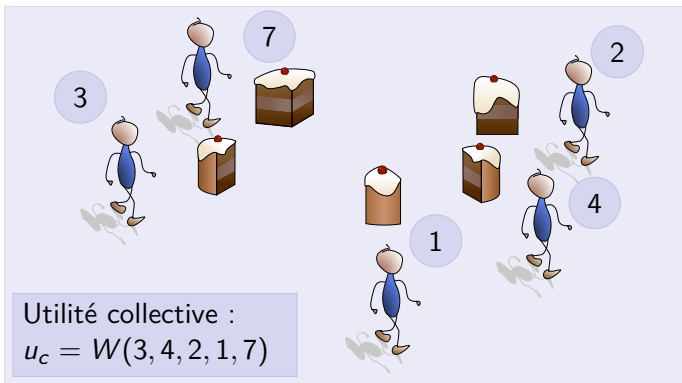
# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .



# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .



# Hypothèses

- Les préférences des agents sont numériques (utilités).
- La qualité d'une solution est mesurée uniquement sur la base des **utilités individuelles** des agents.
- Les utilités individuelles sont agrégées en une utilité collective par le biais d'une **fonction d'utilité collective**  $W$ .
- Nous introduisons un **vecteur de droits inégaux**  $\vec{e} \in \mathbb{Q}^n$ .
- Nous supposons que toutes les utilités sont exprimées sur la même échelle d'utilités.

# Fonctions d'utilité collectives classiques

- CUF utilitariste classique.
- CUF égalitariste.
- Autres : somme des puissances, OWA. . .

## Fonctions d'utilité collectives classiques

- CUF utilitariste classique.
- CUF égalitariste.
- Autres : somme des puissances, OWA...

### CUF utilitariste classique [Harsanyi]

$$W(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u_i.$$

### Caractéristiques

Les agents sont des « producteurs » d'utilité (interchangeabilité des utilités individuelles).

Indifférente aux inégalités entre agents  $\rightsquigarrow$  peut conduire à des décisions très inéquitables.

## Fonctions d'utilité collectives classiques

- CUF utilitariste classique.
- CUF égalitariste.
- Autres : somme des puissances, OWA. . .

### CUF égalitariste [Rawls]

$$W(\vec{u}) = \min_{i=1}^n u_i.$$

### Caractéristiques

Ne prend en compte que l'agent le moins satisfait  $\rightsquigarrow$  tendance naturelle à l'équité.

Peut conduire à des solutions non Pareto-optimales à cause de l'effet de noyade classiquement pallié par l'ordre leximin.

# Fonctions d'utilité collectives classiques

- CUF utilitariste classique.
- CUF égalitariste.
- Autres : somme des puissances, OWA...

## Somme des puissances

$$W_p^{(n)}(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left( \prod_{i=1}^n u_i \right)^{1/n}, & p = 0 \end{cases}$$

## Caractéristiques

Réalise un compromis entre utilitarisme et égalitarisme.

Si  $p = 1$ , le critère est utilitariste.

Si  $p = 0$ , le critère est celui de Nash.

Pour  $p \rightarrow -\infty$ , le critère tend vers l'ordre social leximin.

## Présentation du principe

Nous cherchons un moyen de prendre en compte l'**inégalité des droits exogènes** dans le processus de prise de décision collective.

### Idée

L'idée est de remplacer chaque agent par autant de **clones** qu'il possède de droits (ou un nombre proportionnel si les droits ne sont pas entiers), en répartissant l'utilité de chaque agent initial entre ses clones.

Principe proposé dans quelques travaux [Brams and Taylor, 1996] toujours dans un contexte égalitariste.



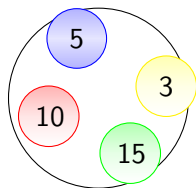
**Brams, S. J. and Taylor, A. D. (1996).**

*Fair Division: From Cake-cutting to Dispute Resolution.*

Cambridge University Press.

# Illustration du principe

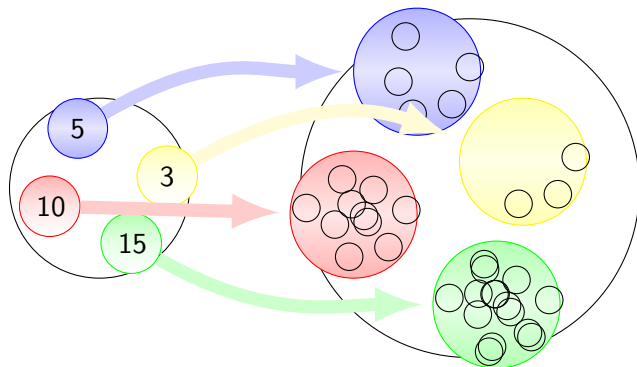
Agents avec droits inégaux



# Illustration du principe

Agents avec droits inégaux

Duplication des agents

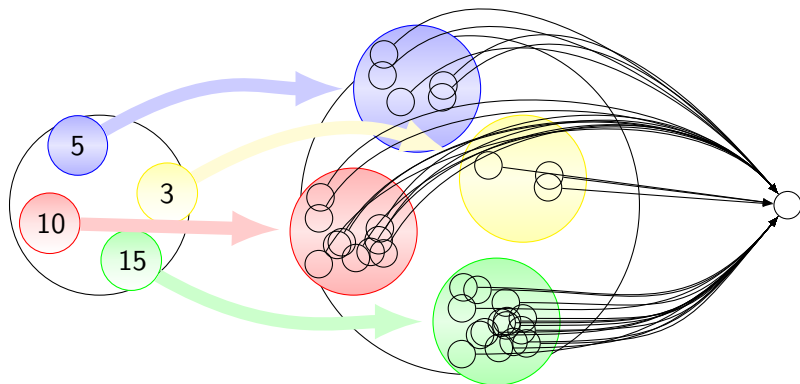


# Illustration du principe

Agents avec droits inégaux

Duplication des agents

Décision collective



## Un exemple concret

### Exemple

Une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau.

- Ressource à répartir: l'eau (la ferme  $i$  reçoit la quantité  $a_i$ ).
- Chaque ferme  $i$  reçoit une utilité individuelle  $u_i(a_i)$ .
- Chaque ferme  $i$  héberge  $e_i$  habitants ( $e_i =$  droit).

# Un exemple concret

## Exemple

Une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau.

- Ressource à répartir: l'eau (la ferme  $i$  reçoit la quantité  $a_i$ ).
- Chaque ferme  $i$  reçoit une utilité individuelle  $u_i(a_i)$ .
- Chaque ferme  $i$  héberge  $e_i$  habitants ( $e_i = \text{droit}$ ).

## Division avec utilitarisme classique :

- L'utilité d'une ferme est son revenu. Elle est divisée entre les habitants d'une ferme.
- Le bien-être collectif est mesuré par la somme de tous les revenus.

$$\leadsto W_{\vec{e}}(\vec{u}) = \sum_i (e_i \cdot (u_i/e_i)) = \sum_i u_i.$$

# Un exemple concret

## Exemple

Une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau.

- Ressource à répartir: l'eau (la ferme  $i$  reçoit la quantité  $a_i$ ).
- Chaque ferme  $i$  reçoit une utilité individuelle  $u_i(a_i)$ .
- Chaque ferme  $i$  héberge  $e_i$  habitants ( $e_i = \text{droit}$ ).

## Division avec égalitarisme :

- L'utilité d'une ferme est son revenu. Elle est divisée entre les habitants d'une ferme.
- On cherche une répartition équitable de tous les revenus.

$$\leadsto W_{\vec{e}}(\vec{u}) = \min_i (u_i/e_i).$$

# Un exemple concret

## Exemple

Une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau.

- Ressource à répartir: l'eau (la ferme  $i$  reçoit la quantité  $a_i$ ).
- Chaque ferme  $i$  reçoit une utilité individuelle  $u_i(a_i)$ .
- Chaque ferme  $i$  héberge  $e_i$  habitants ( $e_i = \text{droit}$ ).

## Indivision avec utilitarisme classique :

- L'utilité d'une ferme est la « prospérité » de celle-ci (l'agrément d'y habiter).
- Le bien-être collectif est mesuré par la somme de tous les revenus.

$$\leadsto W_{\vec{e}}(\vec{u}) = \sum_i (e_i \cdot u_i).$$

# Un exemple concret

## Exemple

Une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau.

- Ressource à répartir: l'eau (la ferme  $i$  reçoit la quantité  $a_i$ ).
- Chaque ferme  $i$  reçoit une utilité individuelle  $u_i(a_i)$ .
- Chaque ferme  $i$  héberge  $e_i$  habitants ( $e_i =$  droit).

## Division avec égalitarisme :

- L'utilité d'une ferme est la « prospérité » de celle-ci (l'agrément d'y habiter).
- On cherche une répartition équitable des utilités.

$$\leadsto W_{\vec{e}}(\vec{u}) = \min_i u_i.$$

## Formalisation du principe

Le principe est fondé sur la fonction de répartition :

### Fonction de répartition

Une fonction de répartition est une fonction  $\div : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Exemples :  $u \div e = u/e$ ,  $u \div e = u$ .

### Principe de duplication

On définit, par duplication, une CUF à droits inégaux  $W_{\vec{e}}$  par :

$$W_{\vec{e}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} & \mapsto & W(\vec{u} \triangleright_{\vec{e}} \div) \end{array}, \text{ avec}$$

$$\vec{u} \triangleright_{\vec{e}} \div \stackrel{\text{def}}{=} (\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{e_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{r_n, \dots, r_n}_{e_n \text{ fois}}),$$

et  $r_i = u_i \div e_i$ .

# CUF à droits inégaux basiques

	$u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u/e$ (division)	$u \div e \stackrel{\text{def}}{=} u$ (réplication)
$W \stackrel{\text{def}}{=} \sum^{(m)}$ (utilitarisme cl.)	$\sum_{i \in N} u_i$	$\sum_{i \in N} (e_i \cdot u_i)$
$W \stackrel{\text{def}}{=} \min^{(m)}$ (égalitarisme)	$\min_{i \in N} (u_i/e_i)$	$\min_{i \in N} u_i$

# Somme des puissances généralisée

- **Division :**

$$W_{p, \vec{e}, div}^{(n)}(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n e_i^{1-p} \cdot u_i^p \right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left( \prod_{i=1}^n \left( \frac{u_i}{e_i} \right)^{e_i} \right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

- **Réplication :**

$$W_{p, \vec{e}, rep}^{(n)}(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n e_i \cdot u_i^p \right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left( \prod_{i=1}^n u_i^{e_i} \right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

- 1 **Le principe de duplication étendu**
  - Cadre formel
  - Principe de duplication des agents
  - CUF à droits inégaux
- 2 **Propriétés des droits inégaux**
  - Propriétés classiques étendues
  - Nouvelles propriétés
  - Propriétés des CUF introduites
- 3 **Applications**
- 4 **Droits inégaux ordinaux**

# Une pseudo-axiomatisation des CUF à droits inégaux

## Objectif

Caractériser les fonctions d'utilité collectives à droits inégaux par :

- l'extension des propriétés classiques aux droits inégaux,
- l'introduction de nouvelles propriétés pour caractériser l'effet des droits inégaux sur la prise de décision.

# Unanimité

## Unanimité classique

Un vecteur d'utilités  $\vec{u}$  **Pareto-domine** un autre vecteur d'utilités  $\vec{v}$  ssi  $\forall i, u_i \geq v_i$  et  $\exists i$  t.q.  $u_i > v_i$ .

Un vecteur non Pareto-dominé est dit **Pareto-efficace**.

Une CUF classique  $W$  satisfait l'**unanimité** ssi si  $\vec{u}$  Pareto-domine  $\vec{v}$ , alors  $W(\vec{v}) < W(\vec{u})$ .



## Unanimité à droits inégaux

(inchangé)

# Unanimité

## Unanimité classique

Un vecteur d'utilités  $\vec{u}$  **Pareto-domine** un autre vecteur d'utilités  $\vec{v}$  ssi  $\forall i, u_i \geq v_i$  et  $\exists i$  t.q.  $u_i > v_i$ .

Un vecteur non Pareto-dominé est dit **Pareto-efficace**.

Une CUF classique  $W$  satisfait l'**unanimité** ssi si  $\vec{u}$  Pareto-domine  $\vec{v}$ , alors  $W(\vec{v}) < W(\vec{u})$ .



## Unanimité à droits inégaux

(inchangé)

# Anonymat

## Anonymat classique

$W$  satisfait la propriété d'**anonymat** si et seulement si  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \sigma$  permutation de  $N$ ,  $W(\vec{u}) = W(\langle u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)} \rangle)$ .



## Anonymat à droits inégaux

$W_{\vec{e}}$  satisfait la propriété d'**anonymat généralisé** si et seulement si  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \sigma$  permutation de  $N$ ,

$$W_{\vec{e}}(\vec{u}) = W_{\langle e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)} \rangle}(\langle u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)} \rangle).$$

# Anonymat

## Anonymat classique

$W$  satisfait la propriété d'**anonymat** si et seulement si  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \sigma$  permutation de  $N$ ,  $W(\vec{u}) = W(\langle u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)} \rangle)$ .



## Anonymat à droits inégaux

$W_{\vec{e}}$  satisfait la propriété d'**anonymat généralisé** si et seulement si  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall \sigma$  permutation de  $N$ ,

$$W_{\vec{e}}(\vec{u}) = W_{\langle e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)} \rangle}(\langle u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)} \rangle).$$

# Indépendance aux agents non concernés

## IUA classique

$W$  satisfait la propriété d'IUA ssi pour tout quadruplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}')$  tel que:

- pour un agent  $i$  :  $u_i = v_i$  et  $u'_i = v'_i$ ,
- pour tout agent  $k \neq i$  :  $u_k = u'_k$  et  $v_k = v'_k$ ,

nous avons :  $W(\vec{u}) \leq W(\vec{v}) \Leftrightarrow W(\vec{u}') \leq W(\vec{v}')$ .

# Indépendance aux agents non concernés



## IUA à droits inégaux

$W_{\vec{e}}$  satisfait la propriété d'IUA généralisée si et seulement si pour tout quadruplet  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}')$  et toute paire  $(\vec{e}, \vec{e}')$  tels que :

- pour un agent  $i$  :  $u_i = v_i$  et  $u'_i = v'_i$ ,
- pour tout agent  $k \neq i$  :  $u_k = u'_k$ ,  $v_k = v'_k$ , et  $e_k = e'_k$ ,

nous avons :  $W_{\vec{e}}(\vec{u}) \leq W_{\vec{e}}(\vec{v}) \Leftrightarrow W_{\vec{e}'}(\vec{u}') \leq W_{\vec{e}'}(\vec{v}')$ .

# Conformité

## Conformité

$\vec{e}$  et  $\vec{e}'$  tels que  $e_k = e'_k$  pour tout  $k \neq i$ , et  $e_i < e'_i$ .

$W_{\vec{e}}$  vérifie la propriété de **conformité** ssi pour toute paire  $(\vec{u}, \vec{v})$ , on a

$$(W_{\vec{e}}(\vec{u}) \geq W_{\vec{e}}(\vec{v}) \text{ et } u_i > v_i) \Rightarrow W_{\vec{e}'}(\vec{u}) \geq W_{\vec{e}'}(\vec{v}).$$

Cette propriété s'interprète de manière plus intuitive en terme de décision optimale.

## Avantage aux droits élevés

### Avantage aux droits élevés

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux profils tels que  $\vec{v}$  est égal au profil  $\vec{u}$  dans lequel on a permuté  $u_i$  et  $u_j$ , avec  $u_i > u_j$ .

$W_{\vec{e}}$  **avantage les droits élevés** ssi pour tout  $\vec{e}$ ,

$$W_{\vec{e}}(\vec{v}) \leq W_{\vec{e}}(\vec{u}) \Leftrightarrow e_i \geq e_j.$$

Cette propriété n'est pas équivalente à la conformité.

**Question** : *Existe-t-il un lien entre ces deux propriétés ?*

# Insensibilité à une dilatation commune des droits

## IDCD

$W_{\vec{e}}$  est **insensible à une dilatation commune des droits** (IDCD) ssi  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \vec{e}$  vecteur de droits, et pour tout couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de profils d'utilité,

$$W_{\vec{e}}(\vec{u}) \geq W_{\vec{e}}(\vec{v}) \Leftrightarrow W_{k \cdot \vec{e}}(\vec{u}) \geq W_{k \cdot \vec{e}}(\vec{v}).$$

# Propriétés vérifiées par les CUF classiques

	unanimité	anonymat	IUA	conformité	ADE	IDCD
$\sum_i e_i \cdot u_i$	oui	oui	oui	oui	oui	oui
$\sum_i u_i$	oui	oui	oui	oui	<b>non</b>	oui
$\min_i u_i / e_i$	<b>non</b> <sup>1</sup>	oui	oui	oui	oui	oui
$\min_i u_i$	<b>non</b> <sup>1</sup>	oui	oui	oui	<b>non</b>	oui

- $W_{p, \vec{e}, div}^{(n)}$  vérifie toutes les propriétés introduites.
- $W_{p, \vec{e}, rep}^{(n)}$  vérifie toutes les propriétés introduites, sauf l'ADE pour  $p = 1$ .

---

<sup>1</sup>Lié à l'effet de noyade.

# Propriétés vérifiées par les CUF classiques

	unanimité	anonymat	IUA	conformité	ADE	IDCD
$\sum_i e_i \cdot u_i$	oui	oui	oui	oui	oui	oui
$\sum_i u_i$	oui	oui	oui	oui	<b>non</b>	oui
$\min_i u_i / e_i$	<b>non</b> <sup>1</sup>	oui	oui	oui	oui	oui
$\min_i u_i$	<b>non</b> <sup>1</sup>	oui	oui	oui	<b>non</b>	oui

- $W_{p, \vec{e}, div}^{(n)}$  vérifie toutes les propriétés introduites.
- $W_{p, \vec{e}, rep}^{(n)}$  vérifie toutes les propriétés introduites, sauf l'ADE pour  $p = 1$ .

---

<sup>1</sup>Lié à l'effet de noyade.

# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

- 1 **Le principe de duplication étendu**
  - Cadre formel
  - Principe de duplication des agents
  - CUF à droits inégaux
- 2 **Propriétés des droits inégaux**
  - Propriétés classiques étendues
  - Nouvelles propriétés
  - Propriétés des CUF introduites
- 3 **Applications**
- 4 **Droits inégaux ordinaux**

# Répartition d'un bien vital

## Exemple

Une ONG doit répartir une quantité de riz (ressource) entre plusieurs pays (agents) sinistrés par la famine. Les pays sont de tailles (droits) différentes.

## CUF proposée

- Contexte résolument **égalitariste**.
- Utilité **divisible** (quantité de riz).

$$W(\vec{u}) = \min_i \left( \frac{u_i}{e_i} \right)$$

# Répartition d'un bien vital

## Exemple

Une ONG doit répartir une quantité de riz (ressource) entre plusieurs pays (agents) sinistrés par la famine. Les pays sont de tailles (droits) différentes.

## CUF proposée

- Contexte résolument **égalitariste**.
- Utilité **divisible** (quantité de riz).

$$W(\vec{u}) = \min_i \left( \frac{u_i}{e_i} \right)$$

# Infrastructures collectives

## Exemple

Un nombre limité d'infrastructures de loisirs doit être réparti dans un certain nombre de villes (agents) de tailles (droits) différentes.

## CUF proposée

- Contexte **utilitariste** (infrastructures de loisirs).
- Utilité **non divisible** (satisfaction des habitants d'une ville).

$$W(\vec{u}) = \sum_i (u_i \times e_i)$$

# Infrastructures collectives

## Exemple

Un nombre limité d'infrastructures de loisirs doit être réparti dans un certain nombre de villes (agents) de tailles (droits) différentes.

## CUF proposée

- Contexte **utilitariste** (infrastructures de loisirs).
- Utilité **non divisible** (satisfaction des habitants d'une ville).

$$W(\vec{u}) = \sum_i (u_i \times e_i)$$

# Le prix du kWh d'électricité

## Exemple

Une compagnie distributrice d'électricité doit fixer un prix de vente du kWh d'énergie électrique pour les utilisateurs de son réseau. Ces utilisateurs sont réunis en communes (agents) de tailles (droits) différents. Le prix de vente pour une commune  $i$  constitue une désutilité identique pour tous les habitants et acheminer l'électricité à une petite commune est plus cher qu'à une grande.

## CUF proposée

- Contexte **égalitariste**.
- (Dés-)utilité **non divisible** (prix par habitant).

$$W(\vec{u}) = \min_i(u_i)$$

# Le prix du kWh d'électricité

## Exemple

Une compagnie distributrice d'électricité doit fixer un prix de vente du kWh d'énergie électrique pour les utilisateurs de son réseau. Ces utilisateurs sont réunis en communes (agents) de tailles (droits) différents. Le prix de vente pour une commune  $i$  constitue une désutilité identique pour tous les habitants et acheminer l'électricité à une petite commune est plus cher qu'à une grande.

## CUF proposée

- Contexte **égalitariste**.
- (Dés-)utilité **non divisible** (prix par habitant).

$$W(\vec{u}) = \min_i(u_i)$$

# La radio

## Exemple

$m$  individus répartis en  $n$  groupes (nos  $n$  agents) partagent un espace commun doté d'un poste de radio pouvant diffuser  $n$  stations différentes. Les  $e_i$  membres du groupe  $i$  sont tous amateurs de la station  $i$ . Comment répartir le temps de diffusion des stations  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  (avec  $\sum_i x_i = 1$ ) ?

## CUF proposées

- $W(\vec{u}) = \min_i (u_i)$  (temps de «satisfaction»),
- $W(\vec{u}) = \min_i (u_i/e_i)$  (temps de «choix»).

# La radio

## Exemple

$m$  individus répartis en  $n$  groupes (nos  $n$  agents) partagent un espace commun doté d'un poste de radio pouvant diffuser  $n$  stations différentes. Les  $e_i$  membres du groupe  $i$  sont tous amateurs de la station  $i$ . Comment répartir le temps de diffusion des stations  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  (avec  $\sum_i x_i = 1$ ) ?

## CUF proposées

- $W(\vec{u}) = \min_i(u_i)$  (temps de «satisfaction»),
- $W(\vec{u}) = \min_i(u_i/e_i)$  (temps de «choix»).

## La radio

**Remarque :** la deuxième solution proposée est la même que celle proposée dans [Moulin, 2003] avec la fonction de Nash, sans l'aide des droits inégaux :

$$W(\vec{u}) = \prod_{j=1}^m u_j = \prod_{i=1}^n x_i^{e_i}$$



**Moulin, H. (2003).**

*Fair division and collective welfare.*

MIT Press.

# Fonctions d'utilité collective avec droits exogènes inégaux

- 1 **Le principe de duplication étendu**
  - Cadre formel
  - Principe de duplication des agents
  - CUF à droits inégaux
- 2 **Propriétés des droits inégaux**
  - Propriétés classiques étendues
  - Nouvelles propriétés
  - Propriétés des CUF introduites
- 3 **Applications**
- 4 **Droits inégaux ordinaux**

## Et avec des droits exogènes ordinaux ?

Qu'est-il possible de faire lorsque l'on ne peut pas quantifier les droits numériquement (ordre de priorité) ?

Nous proposons deux procédures de prise de décision dans ce cas-là (méthode forte et méthode faible).

Voir article.

## Et avec des droits exogènes ordinaux ?

Qu'est-il possible de faire lorsque l'on ne peut pas quantifier les droits numériquement (ordre de priorité) ?

Nous proposons deux procédures de prise de décision dans ce cas-là (méthode forte et méthode faible).

Voir article.

# Résumé des contributions

## Ce que nous avons vu aujourd'hui :

- Un cadre formel pour prendre en compte des droits exogènes inégaux dans un contexte utilitariste.
- Des propriétés caractérisant les CUF à droits inégaux.
- Quelques exemples de CUF à droits inégaux.
- Quelques exemples d'application.

## Ce que nous n'avons pas vu aujourd'hui :

- D'autres exemples.
- Un début d'extension aux ordres de priorité.

# Résumé des contributions

## Ce que nous avons vu aujourd'hui :

- Un cadre formel pour prendre en compte des droits exogènes inégaux dans un contexte utilitariste.
- Des propriétés caractérisant les CUF à droits inégaux.
- Quelques exemples de CUF à droits inégaux.
- Quelques exemples d'application.

## Ce que nous n'avons pas vu aujourd'hui :

- D'autres exemples.
- Un début d'extension aux ordres de priorité.

# Question ouvertes et travaux futurs

- Une axiomatisation plus rigoureuse des CUF à droits inégaux.
- Une extension à d'autres fonctions de répartition (quel sens leur donner ?).
- La poursuite des travaux sur les ordres de priorité, avec éventuellement un aspect algorithmique et complexité.

# Question ouvertes et travaux futurs

- Une axiomatisation plus rigoureuse des CUF à droits inégaux.
- Une extension à d'autres fonctions de répartition (quel sens leur donner ?).
- La poursuite des travaux sur les ordres de priorité, avec éventuellement un aspect algorithmique et complexité.

# Question ouvertes et travaux futurs

- Une axiomatisation plus rigoureuse des CUF à droits inégaux.
- Une extension à d'autres fonctions de répartition (quel sens leur donner ?).
- La poursuite des travaux sur les ordres de priorité, avec éventuellement un aspect algorithmique et complexité.

---

Fin.

---

**Plus d'informations ?**

`michel.lemaitre@cert.fr`

`sylvain.bouveret@cert.fr`

`http://www.cert.fr/dcsd/THESES/sbouveret`