Le Partage de Ressources en IA
Une Courte Introduction

Sylvain Bouveret

LIG – Univ. Grenoble-Alpes

Camp d'Été CIMI Recherche-Midi

Toulouse, 29 août 2019

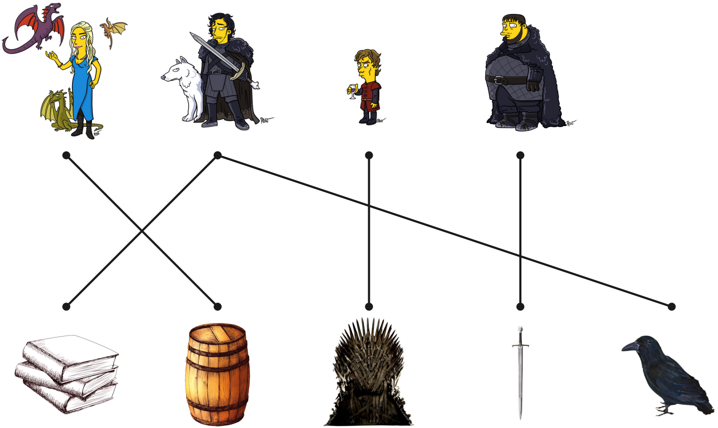
Le problème de partage...

Le problème de partage...




Le problème de partage...

Le problème de partage...



Le menu du jour

Dans cette présentation, nous verrons :

1. Pourquoi ce problème est important
2. Quels sont les autres problèmes de cette famille appelée choix social
3. Pourquoi l'IA s'intéresse à ce genre de problèmes
4. Comment résoudre un problème de partage équitable. Le point de vue de l'IA.

Le menu du jour

Dans cette présentation, nous verrons :

1. Pourquoi ce problème est important
2. Quels sont les autres problèmes de cette famille appelée choix social
3. Pourquoi l'IA s'intéresse à ce genre de problèmes
4. Comment résoudre un problème de partage équitable. Le point de vue de l'IA.

...Puis nous mettrons tout cela en pratique en Python

De nombreuses applications...

Pourquoi ce problème de partage équitable est-il important ?

De nombreuses applications...

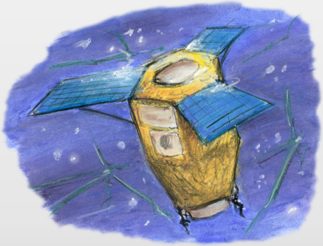
Pourquoi ce problème de partage équitable est-il important ?

Avant tout parce qu'il a de nombreuses applications très concrètes...

De nombreuses applications...

Pourquoi ce problème de partage équitable est-il important ?
Avant tout parce qu'il a de nombreuses applications très concrètes...

- Partage d'exploitation de satellites d'observation de la Terre



Satellite Pléiades (https://pleiades.cnes.fr/fr), CNES (image S.B)

De nombreuses applications...

Pourquoi ce problème de partage équitable est-il important ?
Avant tout parce qu'il a de nombreuses applications très concrètes...

- Affectation de sujets de TP à des étudiants
- Répartition de tâches entre robots
- Systèmes de *crowdsourcing*
- Répartition de tâches à des machines
- Affectation de parcours universitaires à des bacheliers
- ...

Le choix social

Le partage équitable n'est qu'un des nombreux exemples de problèmes abordés par la **théorie du choix social**.

Le choix social

Le partage équitable n'est qu'un des nombreux exemples de problèmes abordés par la **théorie du choix social**.

La **théorie du choix social** est dédiée à l'analyse des problèmes de **décision collective** et aux méthodes permettant de les résoudre.

Le choix social

Le partage équitable n'est qu'un des nombreux exemples de problèmes abordés par la **théorie du choix social**.

La **théorie du choix social** est dédiée à l'analyse des problèmes de **décision collective** et aux méthodes permettant de les résoudre.

- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$

Le choix social

Le partage équitable n'est qu'un des nombreux exemples de problèmes abordés par la **théorie du choix social**.

La **théorie du choix social** est dédiée à l'analyse des problèmes de **décision collective** et aux méthodes permettant de les résoudre.

- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
- Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$...

Le choix social

Le partage équitable n'est qu'un des nombreux exemples de problèmes abordés par la **théorie du choix social**.

La **théorie du choix social** est dédiée à l'analyse des problèmes de **décision collective** et aux méthodes permettant de les résoudre.

- Un ensemble d'**options** $\mathcal{O}$
- Un ensemble d'**agents** $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$...
- ...Exprimant des **opinions** sur les options.

$$\Downarrow$$

Opinion collective, choix d'une option...

Le vote

Problème n°1 : le vote

Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

Le vote

Problème n°1 : le vote
Nous devons élire un représentant parmi un ensemble de m candidats sur lesquels n électeurs ont diverses préférences.

- Options : candidats (m)
- Agents : électeurs (n)
- Préférences : bulletins de vote

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \ldots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \ldots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \ldots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \ldots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Règle de pluralité : le vainqueur est le candidat classé premier par le plus grand nombre d'électeurs

$$plurality(P) = ?$$

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \dots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \dots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \dots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Règle de pluralité : le vainqueur est le candidat classé premier par le plus grand nombre d'électeurs

$$plurality(P) = c$$

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \ldots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \ldots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Règle de Borda : un candidat classé 1[er] / 2[ème] / 3[ème] / 4[ème] reçoit 3 / 2 / 1 / 0 points. Le candidat récoltant un maximum de points gagne.

$$a \mapsto (4 \times 3) + 2 = 14 \qquad b \mapsto ? \qquad c \mapsto ? \qquad d \mapsto ?$$
$$Borda(P) = ?$$

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \ldots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \ldots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Règle de Borda : un candidat classé 1^{er} / $2^{ème}$ / $3^{ème}$ / $4^{ème}$ reçoit 3 / 2 / 1 / 0 points. Le candidat récoltant un maximum de points gagne.

$$a \mapsto (4 \times 3) + 2 = 14 \quad b \mapsto 17 \quad c \mapsto 15 \quad d \mapsto 8$$
$$Borda(P) = b$$

Des règles de vote

- $X = \{a, b, c, \ldots\}$ ensemble de candidats
- $N = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'électeurs
- chaque électeur exprime un ordre $\succ_i$ sur les candidats ;
- profil de vote : $P = \langle \succ_1, \ldots, \succ_n \rangle$

électeurs 1, 2, 3, 4 :	$c \succ b \succ d \succ a$
électeurs 5, 6, 7, 8 :	$a \succ b \succ d \succ c$
électeur 9 :	$c \succ a \succ b \succ d$

Plein d'autres règles !

Partage équitable continu – gâteaux

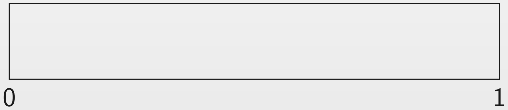
Problème n°2 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.

Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°2 : le partage continu

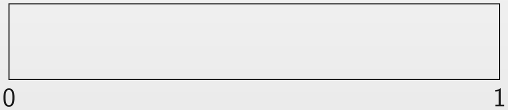
Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



Partage équitable continu – gâteaux

Problème n°2 : le partage continu

Il faut partager un gâteau rectangulaire hétérogène (un cake) entre n agents ayant des évaluations différentes sur les différentes parties du gâteau.



- Options : différents partages du gâteau (∞)
- Agents : les convives (n)
- Préférences : fonctions de valuation (continues, en général additives)

Des protocoles de partage

En général, on s'intéresse à :

- **La proportionalité** : chaque agent pense que sa part vaut au moins $\frac{1}{n}$ du gâteau total.
- **L'absence d'envie** : chaque agent pense que sa part est meilleure que n'importe quelle part reçue par les autres convives.

Des protocoles de partage

En général, on s'intéresse à :

- **La proportionalité** : chaque agent pense que sa part vaut au moins $\frac{1}{n}$ du gâteau total.
- **L'absence d'envie** : chaque agent pense que sa part est meilleure que n'importe quelle part reçue par les autres convives.

2 agents : Je coupe, tu choisis.

- Agent 1 coupe le gâteau en deux parts qu'il estime égales.
- Agent 2 choisit laquelle des deux parts il prend.

Garantit l'absence d'envie et la proportionalité.

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1 L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1. L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$
2. Chaque agent de 2 à n peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1. L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$
2. Chaque agent de 2 à n peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
3. Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1. L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$
2. Chaque agent de 2 à n peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
3. Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.
4. Le jeu recommence avec les agents restants et le reste du gâteau.

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1. L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$
2. Chaque agent de 2 à n peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
3. Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.
4. Le jeu recommence avec les agents restants et le reste du gâteau.

Plus de deux agents

La procédure *Last Diminisher* (Banach-Knaster) :

1. L'agent 1 coupe une part qu'il estime valoir $\frac{1}{n}$
2. Chaque agent de 2 à n peut soit passer, soit raccourcir la part déjà coupée.
3. Le dernier agent ayant (re)coupé la part la récupère dans son assiette et quitte le jeu.
4. Le jeu recommence avec les agents restants et le reste du gâteau.

Garantit la proportionalité (bien sûr pas l'absence d'envie).

Partage équitable discret

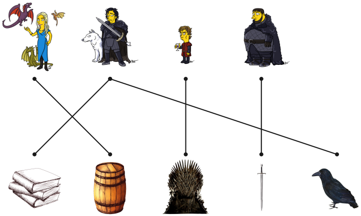
Problème n°3 : le partage discret

Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.

Partage équitable discret

Problème n°3 : le partage discret

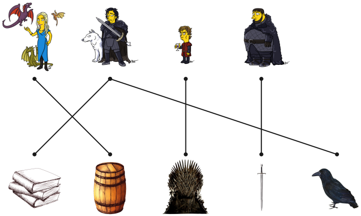
Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



Partage équitable discret

Problème n°3 : le partage discret

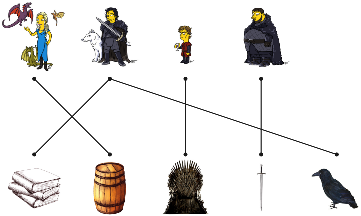
Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



- Options : partages possibles (n^m)
- Agents : consommateurs d'objets (n)
- Préférences : fonction d'évaluation / ordres...

Partage équitable discret

Problème n°3 : le partage discret
Il faut répartir un ensemble de m objets indivisibles entre n agents ayant des évaluations différentes de ces objets.



- Options : partages possibles (n^m)
- Agents : consommateurs d'objets (n)
- Préférences : fonction d'évaluation / ordres...

Nous reviendrons sur ce problème en détails plus tard.

Affectation (matching)

Problème n°4 : l'affectation

Nous devons associer des agents d'un groupe S_1 à des agents d'un groupe S_2. Les agents de S_1 ont des préférences sur les agents de S_2, et vice-versa.

Affectation (matching)

Problème n°4 : l'affectation
Nous devons associer des agents d'un groupe S_1 à des agents d'un groupe S_2. Les agents de S_1 ont des préférences sur les agents de S_2, et vice-versa.

Exemples :

- Affectation d'étudiants à des écoles (one-to-many matching)
- Affectation d'étudiants à des projets (many-to-many matching)
- Appariement d'hommes et de femmes – mariage stable[1] (one-to-one matching)

[1] Métaphore inventée à une époque où le mariage entre personnes de même sexe n'était pas légal...

Le problème du mariage stable

- n femmes et n hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un mariage **stable**

Le problème du mariage stable

- n femmes et n hommes
- Chaque femme a un ordre de préférence sur les hommes, et vice-versa.
- Nous recherchons un mariage **stable**

L'algorithme de **Gale-Shapley** (1962) :

- Chaque homme non fiancé fait une proposition a sa favorite parmi les femmes auxquelles il n'a encore fait aucune proposition.
- Chaque femme choisit son favori parmi toutes les propositions qu'elle reçoit (si elle est déjà fiancée et que la meilleure proposition reçue surpasse son fiancé actuel, elle rompt son engagement).
- On boucle jusqu'à ce que tout le monde soit fiancé.

Formation de coalition

Problème n°5 : la formation de coalitions

n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

Formation de coalition

Problème n°5 : la formation de coalitions
n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants (n).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.

Formation de coalition

Problème n°5 : la formation de coalitions
n agents doivent constituer des groupes. Chaque agent a des préférences sur les autres agents.

- Options : partitions valides des participants.
- Agents : participants (n).
- Préférences : en général des préférences numériques (additives) sur les autres participants.

Généralisation du problème d'affectation. En général, on s'intéresse aux coalitions stables (jeux hédoniques), ou aux coalitions collectivement optimales.

Agrégation de jugement

Problème n°6 : l'agrégation de jugement

Nous disposons de m énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants. n juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.

Agrégation de jugement

Problème n°6 : l'agrégation de jugement
Nous disposons de m énoncés qui peuvent être vrais ou faux. Ces énoncés sont logiquement interdépendants. n juges ont une opinion cohérente sur ces énoncés. Nous devons décider selon l'opinion des juges lesquels de ces énoncés sont vrais.

- Options : énoncés logiquement interdépendants (m)
- Agents : juges (n)
- Préférences : en général binaires (oui / non)

Paradoxe de l’agrégation de jugement

- Instructions des organisateurs du camp CIMI : un étudiant doit être accepté si et seulement s’il a le niveau technique suffisant et sa lettre de motivation est convaincante.

Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Instructions des organisateurs du camp CIMI : un étudiant doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et sa lettre de motivation est convaincante.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Motivation

	Niveau ?	Motivation ?	Accepter ?
Organisateur 1	Oui	Oui	Oui
Organisateur 2	Oui	Non	Non
Organisateur 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non

Paradoxe de l'agrégation de jugement

- Instructions des organisateurs du camp CIMI : un étudiant doit être accepté si et seulement s'il a le niveau technique suffisant et sa lettre de motivation est convaincante.
- Accepter $\leftrightarrow$ Niveau $\wedge$ Motivation

	Niveau ?	Motivation ?	Accepter ?
Organisateur 1	Oui	Oui	Oui
Organisateur 2	Oui	Non	Non
Organisateur 3	Non	Oui	Non
Majorité	Oui	Oui	Non

- (Retour au candidat). Vous avez le niveau technique requis et votre lettre de motivation a été jugée convaincante. Mais nous avons décidé de rejeter votre candidature...

Agrégation de jugement

- Agrégation de jugement : agréger des opinions sur des énoncés logiquement dépendants... mais d'une manière cohérente
- Liens forts avec le raisonnement non monotone, la fusion de croyances, la prise en compte d'inconsistences.

Du choix social partout...

- Affectation de cours à des étudiants
- Élire un représentant politique (par exemple le président de la république)
- Choisir une date commune pour une réunion
- Choisir le futur nom d'une région
- Élire le vainqueur de l'Eurovision
- Planifier la charge de travail d'une équipe de travailleurs
- Affecter des patients à des hôpitaux
- Divisier un territoire
- Former des équipes
- Choisir un emplacement pour une infrastructure commune
- ...

Un problème central en IA

- Au cœur de l'IA, les problèmes de **décision**
- Au cœur des problèmes de décision, les problèmes de **décision collective**

Un problème central en IA

- Au cœur de l'IA, les problèmes de **décision**
- Au cœur des problèmes de décision, les problèmes de **décision collective**

L'intelligence collective (capacité à prendre des décisions en groupe) est l'une des capacités les plus complexes dont les humains sont (supposément) dotés. Il est donc naturel que le choix social soit intimement lié à l'IA. Double objectif :

Un problème central en IA

- Au cœur de l'IA, les problèmes de **décision**
- Au cœur des problèmes de décision, les problèmes de **décision collective**

L'intelligence collective (capacité à prendre des décisions en groupe) est l'une des capacités les plus complexes dont les humains sont (supposément) dotés. Il est donc naturel que le choix social soit intimement lié à l'IA. Double objectif :

- Concevoir des systèmes capables d'interagir en environnement multiagent
- Assister les humains dans la prise de décision collective

Un problème central en IA

- Au cœur de l'IA, les problèmes de **décision**
- Au cœur des problèmes de décision, les problèmes de **décision collective**

L'intelligence collective (capacité à prendre des décisions en groupe) est l'une des capacités les plus complexes dont les humains sont (supposément) dotés. Il est donc naturel que le choix social soit intimement lié à l'IA. Double objectif :

- Concevoir des systèmes capables d'interagir en environnement multiagent
- Assister les humains dans la prise de décision collective

Voyons quelles ont été les grandes étapes de développement de cette discipline...

Les temps anciens

- De la Grèce et l'Inde antiques : Aristote, Chânakya...
- ...À la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle :
    - Condorcet
    - Borda
- Ainsi que les racines philosophiques de l'utilitarisme : Bentham, Stuart Mill...

Naissance du choix social moderne

- **Théorème d'Arrow** (1951) :

Dès qu'il y a au moins 3 options, toute fonction d'agrégation satisfaisant l'**unanimité** et l'**indépendance aux alternatives non pertinentes** est forcément **dictatoriale**.

Naissance du choix social moderne

- **Théorème d'Arrow** (1951) :

Dès qu'il y a au moins 3 options, toute fonction d'agrégation satisfaisant l'**unanimité** et l'**indépendance aux alternatives non pertinentes** est forcément **dictatoriale**.

- Des résultats principalement **axiomatiques** (économie / mathématiques)
- Théorèmes d'impossibilité : **incompatibilité d'un petit ensemble de conditions apparemment raisonnables et anodines** , comme le théorème d'Arrow.
- Aspects computationnels négligés jusqu'ici.

Le calcul rentre en jeu

- Années 50 : **protocoles** de partage (*e.g.* Banach-Knaster) $\rightsquigarrow$ algorithmes ?
- Début des années 80 : **enchères combinatoires**
- Début des années 90 : les chercheurs en informatique commencent à s'intéresser aux aspects computationnels (complexité du vote...)
- 2006 : Premier workshop COMSOC
- En 2019 : communauté trés active, très représentée dans les conférences AAMAS, IJCAI, AAAI, ECAI...
- Et en pratique :
  - Des applis dédiées au choix social (`https://spliddit.org/`, `https://whale.imag.fr`...)
  - Des applications concrètes (*Kidney Exchange*, ParcourSup, allocation de cours, allocation de formations à des étudiants...)

Le choix social computationnel

COMSOC $\approx$ Choix Social $\cap$ Informatique

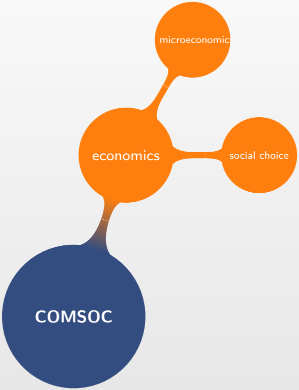
Le choix social computationnel

COMSOC $\approx$ Choix Social $\cap$ Informatique

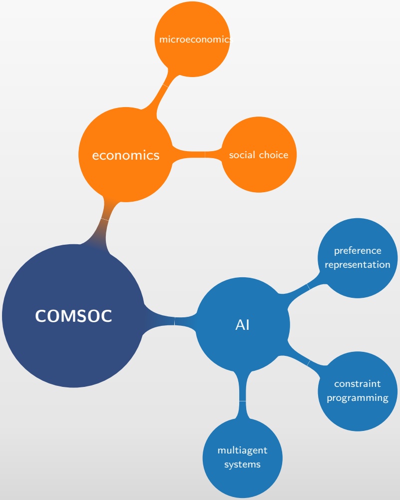
1. Utilisation de techniques de l'économie pour résoudre des problèmes informatiques (partage de réseau, allocation de tâches...)
2. Utilisation de techniques de l'informatique pour analyser et résoudre des problèmes économiques (complexité des procédures de vote, représentation compacte de préférences...)

Un domaine pluridisciplinaire

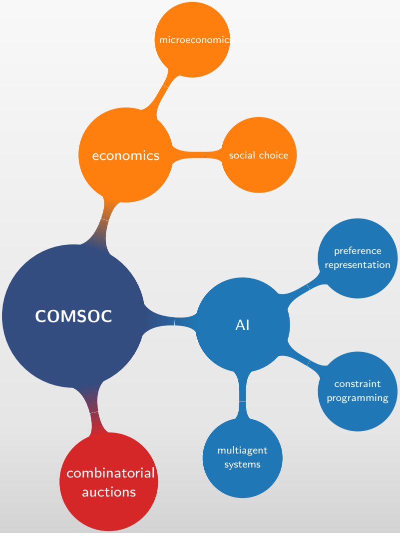
Un domaine pluridisciplinaire



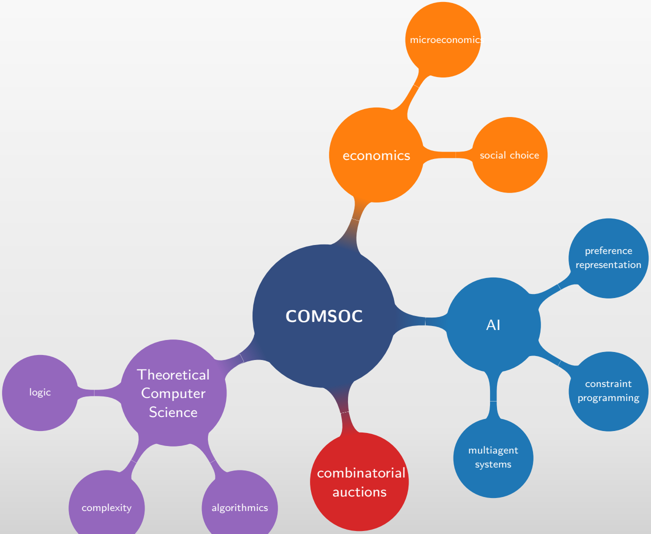
Un domaine pluridisciplinaire



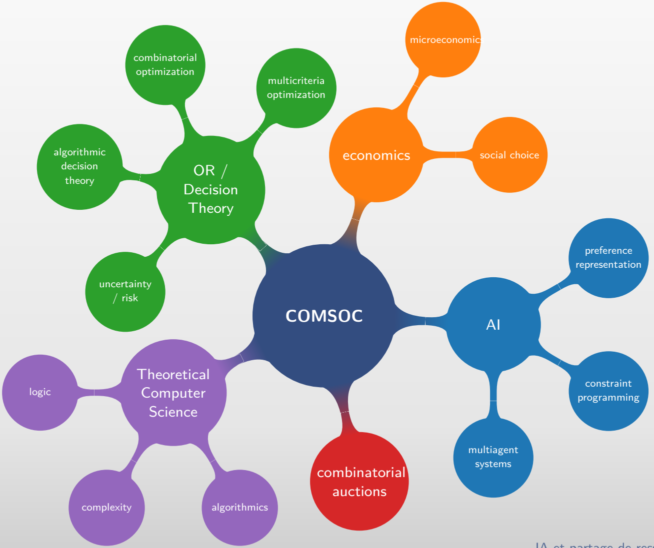
Un domaine pluridisciplinaire



Un domaine pluridisciplinaire



Un domaine pluridisciplinaire



Le problème de partage

Comment le résoudre ?

Le problème de partage...

Le problème de partage...

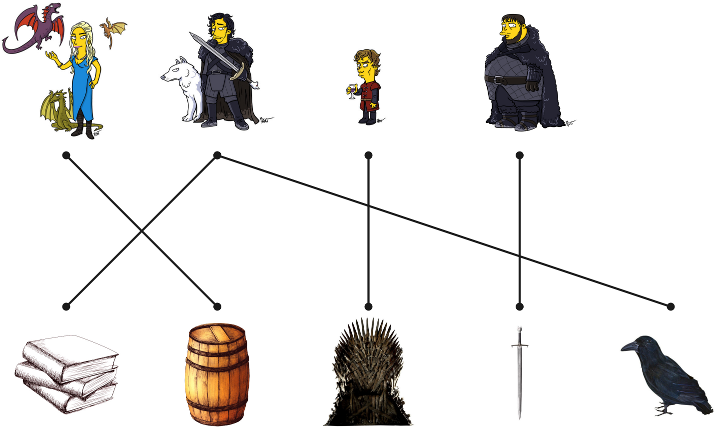
Le problème de partage...








Le problème de partage...



Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...
Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...
Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

- un partage qui prend en compte les préférences des agents pour les satisfaire au mieux
- un partage qui traite chacun de manière équitable
- un partage qui ne sous-exploite pas la ressource (qui donne les objets à ceux qui les veulent vraiment)

Un bon partage

Avant tout, il faut savoir ce que l'on veut...
Qu'est-ce qu'un partage de qualité ?

- un partage qui prend en compte les préférences des agents pour les satisfaire au mieux
- un partage qui traite chacun de manière équitable
- un partage qui ne sous-exploite pas la ressource (qui donne les objets à ceux qui les veulent vraiment)

Point crucial sous-jacent : il faut que les agents expriment leurs **préférences**.

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\triangleright$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \triangleright b \triangleright c \triangleright d$$

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer des **lots** d'objets ?

$\leadsto$ *e.g* $abc \overset{?}{\prec\succ} ab$; $ab \overset{?}{\prec\succ} ac$?

Des préférences pour le partage

Une proposition intuitive...

- Nous supposons que les préférences sont ordinales.
- Chaque agent exprime un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer des **lots** d'objets ?

$\leadsto$ *e.g* $abc \overset{?}{\prec\succ} ab$; $ab \overset{?}{\prec\succ} ac$?

$\rightarrow$ En fait, on a besoin de comparer les éléments de $2^{\mathcal{O}}$ (pas seulement ceux de $\mathcal{O}$).

Espaces combinatoires. . .

Le piège combinatoire. . .

Deux objets. . .

$o_1 \succ o_2 \succ o_1 o_2 \succ \emptyset \rightarrow 3$ comparaisons.

Espaces combinatoires...

Le piège combinatoire...

Quatre objets...

$o_1 o_2 \succ o_2 o_3 o_4 \succ o_1 \succ \emptyset \succ o_2 \succ o_1 o_2 o_3 o_4 \succ o_1 o_3 \succ o_2 o_4 \succ o_3 o_4 \succ o_1 o_4 \succ o_1 o_3 o_4 \succ o_2 o_3 \succ o_4 \succ o_3 \succ o_1 o_2 o_4 \succ o_1 o_2 o_3 \rightarrow$ 15 comparaisons.

Espaces combinatoires. . .

Le piège combinatoire. . .

Vingt objets. . .

$o_8\, o_5 \succ o_5\, o_3\, o_9 \succ o_8 \succ \emptyset \succ o_5 \succ o_8\, o_5\, o_3\, o_9 \succ o_8\, o_3 \succ o_5\, o_9 \succ o_3\, o_9 \succ$
$o_8\, o_9 \succ o_8\, o_3\, o_9 \succ o_5\, o_3 \succ o_9 \succ o_3 \succ o_8\, o_5\, o_9 \succ o_8\, o_5\, o_3\, o_1\, o_2\, o_5\, o_8\, o_9 \succ$
$o_1\, o_5\, o_6 \succ o_7 \succ o_2\, o_3\, o_4\, o_5\, o_6\, o_7\, o_8 \succ o_1\, o_2\, o_3\, o_4\, o_5 \succ o_1\, o_3 \succ o_2 \succ o_1\, o_3\, o_7\, o_9 \succ$
$o_1\, o_5 \succ o_1\, o_7\, o_8\, o_9 \succ o_2 \succ o_4 \succ o_6 \succ o_1\, o_7 \succ o_1\, o_2\, o_3 \succ o_1\, o_2 \succ o_2\, o_5\, o_4 \succ$
$o_1 \succ o_2 \succ o_1\, o_2\, o_5\, o_4 \succ o_1\, o_5 \succ o_2\, o_4 \succ o_5\, o_4 \succ o_1\, o_4 \succ o_1\, o_5\, o_4 \succ o_2\, o_5 \succ$
$o_4 \succ o_5 \succ o_1\, o_2\, o_4 \succ o_1\, o_2\, o_5 \succ o_1\, o_5 \succ o_5\, o_3\, o_9 \succ o_1 \succ \emptyset \succ o_5 \succ$
$o_1\, o_5\, o_3\, o_9 \succ o_1\, o_3 \succ o_5\, o_9 \succ o_3\, o_9 \succ o_1\, o_9 \succ o_1\, o_3\, o_9 \succ o_5\, o_3 \succ o_9 \succ$
$o_3 \succ o_1\, o_5\, o_9 \succ o_1\, o_5\, o_3\, o_9\, o_6\, o_5\, o_1\, o_9 \succ o_9\, o_5\, o_6 \succ o_7 \succ o_6\, o_3\, o_4\, o_5\, o_6\, o_7\, o_1 \succ$
$o_9\, o_6\, o_3\, o_4\, o_5 \succ o_9\, o_3 \succ o_6 \succ o_9\, o_3\, o_7\, o_9 \succ o_9\, o_5 \succ o_9\, o_7\, o_1\, o_9 \succ o_6 \succ o_4 \succ$
$o_6 \succ o_9\, o_7 \succ o_9\, o_6\, o_3 \succ o_9\, o_6 \succ o_6\, o_5\, o_4 \succ o_9 \succ o_6 \succ o_9\, o_6\, o_5\, o_4 \succ o_9\, o_5 \succ$

$\rightarrow$ 1048575 comparaisons $\rightarrow$ l'élicitation nécessite plus de 12 jours !

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Solutions possibles...

1. **Restreindre** ce qu'il est possible d'exprimer, et compléter ce qui manque en se servant d'hypothèses implicites
2. Utiliser des **langages de représentation compacte**

Le dilemme

- Résoudre le problème nécessite d'exprimer des préférences complètes sur l'ensemble des lots possibles
- Mais une représentation et une élicitation explicites sont infaisables en pratique.

Solutions possibles...

1. **Restreindre** ce qu'il est possible d'exprimer, et compléter ce qui manque en se servant d'hypothèses implicites
2. Utiliser des **langages de représentation compacte**

Des exemples de langages compacts (inventés par les chercheurs en IA majoritairement...)

- **Préférences numériques** : logique propositionnelle pondérée, langages d'enchères, GAI-nets, fonctions *k*-additives...
- **Préférences ordinales** : Bases de buts priorisés, CI-nets...

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer les **lots** d'objets ?

$$\leadsto e.g\ abc \overset{?}{\prec\succ} ab\ ;\ ab \overset{?}{\prec\succ} ac\ ?$$

Préférences ordinales responsives

Un langage restreint...

- Supposons les préférences **ordinales**.
- **Restriction** : chaque agent n'exprime qu'un ordre linéaire $\rhd$ sur $\mathcal{O}$ (objets **simples**)

$$\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$$

Problème : Comment comparer les **lots** d'objets ?

$$\rightsquigarrow \textit{e.g } abc \overset{?}{\prec\succ} ab\,;\ ab \overset{?}{\prec\succ} ac\,?$$

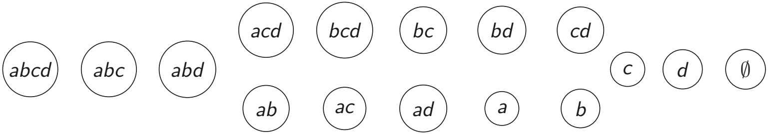
1 On suppose la **monotonie** $\rightsquigarrow$ *e.g* $abc \succ ab$.

2 On suppose la **responsiveness** : si $(X \cup Y) \cap Z = \emptyset$ alors $X \succ Y$ ssi $X \cup Z \succ Y \cup Z$.

$$\rightsquigarrow \textit{e.g } ab \succ ac.$$

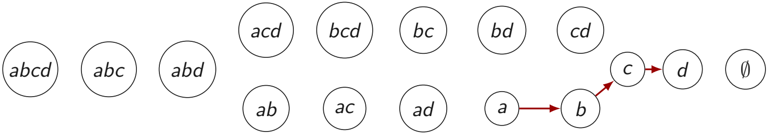
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



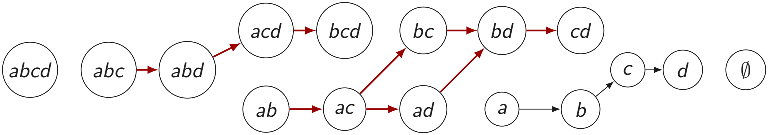
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



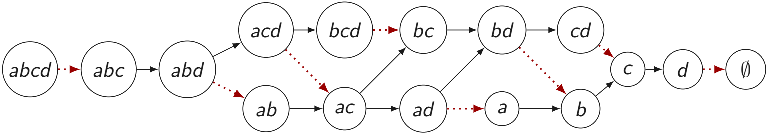
Example

- $\mathcal{A} : a \triangleright b \triangleright c \triangleright d$
- Responsiveness
- Monotonie



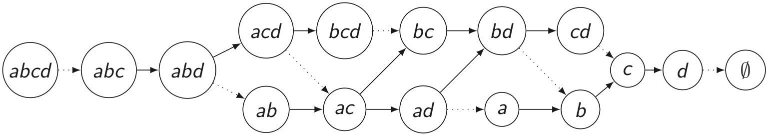
Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



Example

- $\mathcal{A} : a \rhd b \rhd c \rhd d$
- Responsiveness
- Monotonie



Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

- Très simple
- Mais ne permet pas de tout exprimer (compléments, substituts...)

Préférences additives

- On demande à chaque agent i de donner une note $w_i(j)$ à chaque objet j
- Si l'agent i reçoit l'objet j, alors sa satisfaction (on dit « **utilité** ») sera $w_i(j)$
- Si l'agent i reçoit les objets j_1 et j_2, alors son utilité sera $w(i, j_1) + w(i, j_2)$
- Si l'agent i reçoit les objets de l'ensemble $\mathcal{X}$, alors son utilité sera

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j).$$

- Très simple
- Mais ne permet pas de tout exprimer (compléments, substituts...)

Pour la suite de l'exposé, nous nous placerons dans ce modèle à préférences additives.

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$

$o_1 \quad o_2 \quad o_3$

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$

	o_1	o_2	o_3
agent 1			
agent 2			

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j) .

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

$$u_2(\{2,3\}) = 1 + 6 = 7$$

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\rightarrow w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\rightarrow u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

- une **allocation complète** $\overrightarrow{\pi} : \mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{O}}$...

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

$\overrightarrow{\pi} = \langle \{1\}, \{2, 3\} \rangle$

- $u_1(\overrightarrow{\pi}) = 5$
- $u_2(\overrightarrow{\pi}) = 7$

Partage avec préférences additives

Plus formellement, voici le problème à résoudre :

- un ensemble fini d'**objets** $\mathcal{O} = \{1, \ldots, m\}$
- un ensemble fini d'**agents** $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$
- Des **préférences additives** : $\to w_i(j)$ (agent i, objet j)
  $\to u_i(\mathcal{X}) = \sum_{j \in \mathcal{X}} w_i(j)$.

Nous voulons :

- une **allocation complète** $\overrightarrow{\pi} : \mathcal{A} \to 2^{\mathcal{O}}$...
- ...prenant en compte les préférences des agents

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	4	2
agent 2	4	1	6

$\overrightarrow{\pi} = \langle \{1\}, \{2, 3\} \rangle$

- $u_1(\overrightarrow{\pi}) = 5$
- $u_2(\overrightarrow{\pi}) = 7$

Qu'est-ce qu'un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Qu’est-ce qu’un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Mais qu’est-ce qu’un bon partage devrait faire avec ces préférences ?

Qu'est-ce qu'un bon partage ?

OK... Nous avons défini un langage pour exprimer des préférences.

Mais qu'est-ce qu'un bon partage devrait faire avec ces préférences ?

Les économistes ont deux réponses classiques :

1. maximiser une utilité collective définie par une **fonction d'utilité collective**
2. satisfaire un **critère d'équité**

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Égalitarisme** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Les fonctions d'utilité collective

Une fonction d'utilité collective est une fonction g qui calcule la satisfaction globale de la société à partir de celle des individus :

$$g : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_c$$

Fonctions d'utilité classiques :

- **Utilitarisme classique** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Égalitarisme** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

- **Produit de Nash** :

$$uc(\overrightarrow{\pi}) = \prod_{i \in \mathcal{A}} u_i(\pi_i)$$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$

$\overrightarrow{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Évaluation égalitariste :

$\overrightarrow{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\overrightarrow{\pi}) = \min(5, 4 + 6) = 5$

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Évaluation utilitariste :

$\vec{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\vec{\pi}) = 5 + (4 + 6) = 15$
$\vec{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\vec{\pi}') = (5 + 3) + 6 = 14$

Évaluation égalitariste :

$\vec{\pi} = \langle\{o_1\}, \{o_2, o_3\}\rangle \rightarrow uc(\vec{\pi}) = \min(5, 4 + 6) = 5$
$\vec{\pi}' = \langle\{o_1, o_2\}, \{o_3\}\rangle \rightarrow uc(\vec{\pi}') = \min(5 + 3, 6) = 6$

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

- **Absence d'envie** : Une allocation $\overrightarrow{\pi}$ est **sans envie** si aucun n'agent n'envie un autre.

Formellement : $\forall i, j,\ u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi_j)$

Critères d'équité

Une autre approche que de maximiser une fonction d'utilité : les critères d'équité.

- **Absence d'envie** : Une allocation $\vec{\pi}$ est **sans envie** si aucun n'agent n'envie un autre.

Formellement : $\forall i, j,\ u_i(\pi_i) \geq u_i(\pi_j)$

- **Juste part proportionnelle** : La juste part proportionnelle d'un agent i est égale à :

$$u_i^{\text{PFS}} = \frac{u_i(\mathcal{O})}{n} = \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{w_i(j)}{n}$$

  Une allocation $\vec{\pi}$ satisfait **la juste part (proportionelle)** ssi tous les agents ont au moins leur juste part.

- Idée sous-jacente : chaque agent a droit au moins au $n^{\text{ème}}$ du gâteau...

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Juste part proportionnelle :

$\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas la juste part (l'agent 1 obtient $5 < 5.5$)

Exemple

Exemple : 3 objets $\{o_1, o_2, o_3\}$, 2 agents $\{1, 2\}$.

Préférences :

	o_1	o_2	o_3
agent 1	5	3	3
agent 2	1	4	6

Absence d'envie :

$\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie (l'agent 1 envie l'agent 2)

$\overrightarrow{\pi}'$ est sans envie

Juste part proportionnelle :

$\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas la juste part (l'agent 1 obtient $5 < 5.5$)

$\overrightarrow{\pi}'$ satisfait la juste part

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Comment résoudre le problème ?

Bon... Nous avons maintenant tout ce qu'il faut :

- Les agents peuvent exprimer leurs préférences
- Nous savons calculer leur satisfaction
- Nous savons agréger ces satisfactions pour déterminer si le partage est bon ou pas

Mais comment diantre calculer un bon partage ?

L'allocation centralisée

Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.

L'allocation centralisée

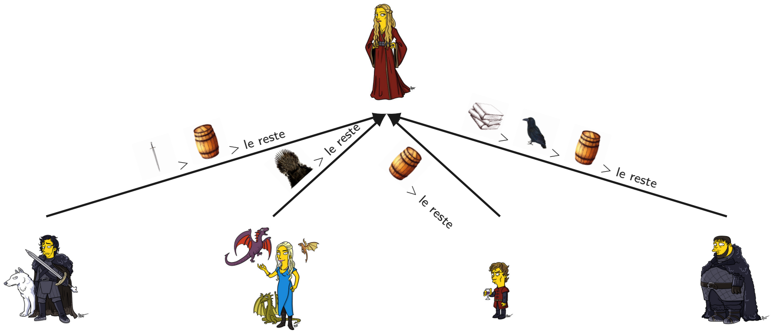
Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.

L'allocation centralisée

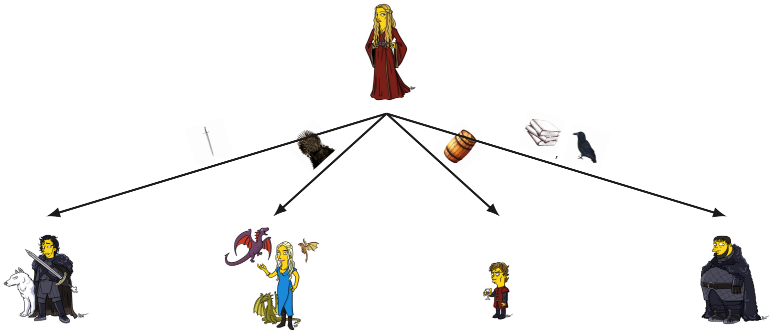
Approche n°1 : l'allocation centralisée

Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.



L'allocation centralisée

Approche n°1 : l'allocation centralisée
Demander aux agents de donner leurs préférences et utiliser un algorithme d'optimisation.



L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)
- Confiance en l'autorité centrale

L'allocation centralisée

- Problème potentiellement compliqué à résoudre : il faut parcourir tous les partages possibles (n^m)
- Terrain de jeu pour les algorithmes de recherche complets ou incomplets
- Complexité de l'élicitation et de la communication des préférences
- Respect de la vie privée (communication des préférences)
- Confiance en l'autorité centrale
- Manipulation de la procédure

L’allocation distribuée

Approche n°2 : l’allocation distribuée

Partir d’un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.

L'allocation distribuée

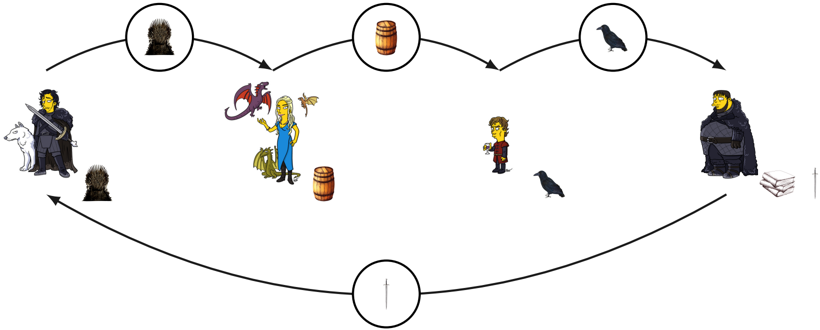
Approche n°2 : l'allocation distribuée

Partir d'un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.

L'allocation distribuée

Approche n°2 : l'allocation distribuée

Partir d'un partage initial aléatoire et demander aux agents de négocier des échanges.



Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués
  - rationels

Distributed allocation

Idée de l'**allocation distribuée** :

- On part d'une allocation **initiale** (potentiellement très mauvaise)
- On laisse les agents **négocier** en s'échangeant des (ensembles de) ressources. Plusieurs types d'échanges possibles :
  - avec / sans argent pour compenser
  - bornés sur le nombre de ressources échangées à la fois
  - bornés sur le nombre d'agents impliqués
  - rationels
  - ...

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas
- Bonne nouvelle : toute séquence d'échanges localement rationnels aboutiront forcément à l'optimum social utilitariste

Propriétés de convergence

Ce qui nous intéresse ici est de savoir si :

- La procédure va aboutir un jour (ou si les cycles d'échanges se poursuivront indéfiniment)
- La procédure va aboutir à un bon partage ou pas
- Bonne nouvelle : toute séquence d'échanges localement rationnels aboutiront forcément à l'optimum social utilitariste
- Mauvaise nouvelle :
    - Cette séquence d'échanges peut être exponentiellement longue...
    - Si l'on impose une quelconque restriction sur les types d'échanges autorisés (*e.g.* nombre de ressources), cette propriété n'est plus vraie.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

L'allocation séquentielle

Approche n°3 : l'allocation séquentielle

Utiliser un protocole interactif tel que les séquences de choix.

Allocation séquentielle

Entre l'allocation centralisée et l'allocation distribuée, une procédure très simple...

Allocation séquentielle

Entre l'allocation centralisée et l'allocation distribuée, une procédure très simple...

Demander aux agents de choisir chacun à leur tour (selon une **séquence prédéterminée**) leur objet préféré parmi ceux qu'il reste.

Exemple

3 agents A, B, C, 6 objets, séquence $ABCCBA \rightarrow A$ choisit d'abord (et prend son objet préféré), ensuite vient B, puis C, puis C à nouveau, etc. . .

Allocation séquentielle

- Protocole simple et naturel
- Utilisé en pratique
- Sans élicitation de préférence

- Jeux de plateau
- Draft (sport)
- Allocation de cours à des étudiants (Harvard Business School)
- ...

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.
Égalitarisme :

p	$n = 2$	$n = 3$
4	ABBA	ABCC
5		
6		
8		
10		

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

$\rightarrow$ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.
Égalitarisme :

p	$n=2$	$n=3$
4	ABBA	ABCC
5	AABBB	ABCCB
6		
8		
10		

Quelques problèmes intéressants

- Meileure séquence : intuitivement, $ABCCBA$ semble **plus équitable** que $AABBCC\ldots$

→ *Quelle est la séquence la plus équitable ?*

Sous certaines hypothèses d'indépendance et l'utilitarisme classique la **séquence alternée** est optimale pour deux agents.
Égalitarisme :

p	$n=2$	$n=3$
4	ABBA	ABCC
5	AABBB	ABCCB
6	ABABBA	ABCCBA
8	ABBABAAB	AACCBBCB
10	ABBAABABBA	ABCABBCACC

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- A : $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- B : $2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- $B : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Que se passe-t-il si A connaît les préférences de B et s'en sert à son profit ?

Aspects stratégiques

Exemple

2 agents, 4 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
- $B : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1$

Séquence $\pi = ABBA \rightarrow \{14|23\}$.

Que se passe-t-il si A connaît les préférences de B et s'en sert à son profit ?

Il peut manipuler en choisissant 2 à la place de 1 au premier tour $\rightarrow$ $\{12|34\}$.

Manipulation coalitionnelle

Exemple

3 agents, 6 objets :

- A : $1 \succ 2 \succ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 6$
- B : $1 \succ 3 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$
- C : $2 \succ 3 \succ 4 \succ 1 \succ 5 \succ 6$

Sequence $\pi = ABCABC \rightarrow \{15|34|26\}$.

Manipulation coalitionnelle

Exemple

3 agents, 6 objets :

- $A : 1 \succ 2 \succ 5 \succ 4 \succ 3 \succ 6$
- $B : 1 \succ 3 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$
- $C : 2 \succ 3 \succ 4 \succ 1 \succ 5 \succ 6$

Sequence $\pi = ABCABC \rightarrow \{15|34|26\}$.

- Si A et B manipulent seuls, il ne peuvent pas obtenir mieux
- S'ils coopèrent, il peuvent obtenir $\{12|35|46\}$, ce qui est strictement meilleur

Conclusion

Que retenir de tout cela ?

Conclusion

- Les problèmes de décision collective font partie intégrante de l'IA
- Ces problèmes ont été d'abord traités majoritairement par les économistes mais depuis quelques années intéressent de près les chercheurs en informatique → COMSOC
- Parmi ces problèmes : le problème de partage équitable
- Un problème plus compliqué qu'il n'y paraît :
  - Représentation des préférences
  - Définition des critères d'équité
  - Calcul d'une solution optimale...
- Des approches diverses : centralisée, distribuée, protocoles séquentiels
- Ce qui intéresse les chercheurs en IA : propriétés computationnelles de ces approches (complexité par exemple), représentation compacte de préférences, manipulabilité, protocoles multiagents...

Conclusion

- Les problèmes de décision collective font partie intégrante de l'IA
- Ces problèmes ont été d'abord traités majoritairement par les économistes mais depuis quelques années intéressent de près les chercheurs en informatique → COMSOC
- Parmi ces problèmes : le problème de partage équitable
- Un problème plus compliqué qu'il n'y paraît :
  - Représentation des préférences
  - Définition des critères d'équité
  - Calcul d'une solution optimale...
- Des approches diverses : centralisée, distribuée, protocoles séquentiels
- Ce qui intéresse les chercheurs en IA : propriétés computationnelles de ces approches (complexité par exemple), représentation compacte de préférences, manipulabilité, protocoles multiagents...

À vous maintenant, pour le TP...

Merci

Vous voulez en savoir plus ?

http://recherche.noiraudes.net/fr/intro-partage.php

Images (honteusement) empruntées sans permission à ADN (https://drawthesimpsons.tumblr.com/)