

Le problème de partage équitable de ressources : modélisation et applications.

Sylvain Bouveret

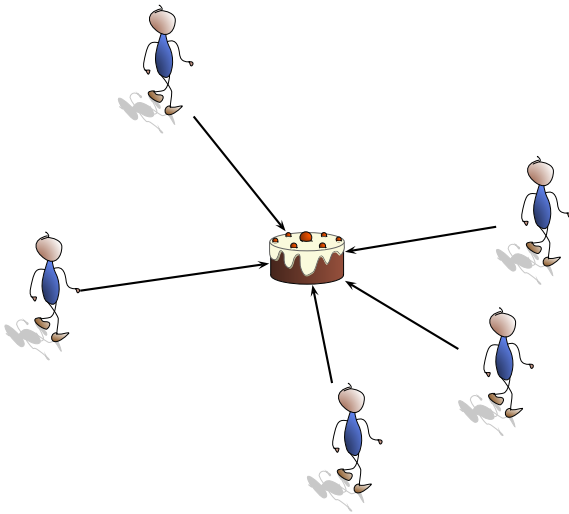
Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
Centre National d'Études Spatiales
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

Séminaire I3 du laboratoire GREYC, Caen.
le 6 décembre 2005.

Qu'est-ce qu'un problème de partage ?

Intuitivement, une ressource à partager entre plusieurs agents. . .

Qu'est-ce qu'un problème de partage ?



Une définition générique du problème de partage ?

Un problème de partage \mathcal{P} est un problème d'optimisation ou de décision.

Entrées :

- ▶ n agents.
- ▶ Une ressource commune **limitée**.
- ▶ Un langage commun d'expression des préférences et les préférences des n agents sur la ressource.
- ▶ Des contraintes sur les allocations possibles de la ressource.
- ▶ Un critère d'optimisation ou de décision.

Sortie :

Une allocation d'une partie de la ressource à chaque agent (parts) qui vérifie les contraintes et qui optimise ou vérifie le critère.

L'équité dans les problèmes de partage

Spécificité des problèmes de partage faisant intervenir des agents humains :

L'**équité** en constitue un point central.

Objectif de la présentation :

- ▶ présenter quelques applications concrètes du partage ;
- ▶ introduire une modélisation du problème de partage, de l'expression des préférences, et du bien-être social ;
- ▶ introduire deux instances particulières du problème de partage.

Le problème de partage équitable de ressources : modélisation et applications.

Quelques applications concrètes du problème de partage

Les éléments d'un problème de partage

- La ressource

- Contraintes sur la ressource

- Préférences et expression compacte

- Le bien-être social

- Autres éléments

Problème de partage avec préférences numériques

- Le langage de représentation

- La complexité

La recherche de l'absence d'envie

- Représentation logique du problème

- Complexité

Équité dans les réseaux informatiques

Réseaux informatiques : domaine très concerné par le partage [Denda et al. 2000].

- ▶ la ressource à partager est l'accès au réseau (bande-passante) ;
- ▶ l'équité est une préoccupation centrale ;
- ▶ les demandes des agents sont diverses selon les applications : temps réel, élastiques, . . . ;
- ▶ l'équité doit être mise en place à tous les niveaux, de la couche matérielle à la couche logicielle : traitement équitable des datagrammes, égalité du temps d'accès dans des programmes critiques comme les enchères en ligne, etc.

Équité dans le transport aérien [Deschinkel 2001]

Du fait de la très forte augmentation du trafic aérien ces dernières années, le partage des secteurs aériens et créneaux aéroportuaires devient critique :

- ▶ Ressource à partager : créneaux d'utilisation des aéroports et secteurs aériens.
- ▶ Agents : les différentes compagnies impliquées.
- ▶ Contraintes : normes de sécurité en vigueur / temps de parcours / routes empruntées par les avions.

Équité dans le transport aérien [Deschinkel 2001]

- ▶ la demande excède la capacité des secteurs aériens \leadsto congestion ;
- ▶ solution actuelle : retarder les avions au sol (inéquitable et engendrant des retards inacceptables) ;
- ▶ solutions envisagées :
 - ▶ procédures d'optimisation avec un critère de coûts globaux (solution utilitariste),
 - ▶ échanges d'information entre les compagnies et le contrôle aérien, conduisant naturellement à des solutions plus équitables,
 - ▶ système de tarification modulable.

Une constellation de satellites [Bouveret et al. 2005]

- Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (en raison de son coût).



Une constellation de satellites [Bouveret et al. 2005]

- ▶ Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (en raison de son coût).
- ▶ Chaque agent (agences civiles et militaires de chaque pays) envoie des demandes d'images à prendre, simples ou complexes (stéréo, tri-stéréo...).
- ▶ Chaque jour, le Centre de Programmation sélectionne les demandes qui seront satisfaites le lendemain et allouées aux agents.
- ▶ L'exploitation doit être :
 - ▶ **efficace** \leadsto la constellation ne doit pas être sous-exploitée,
 - ▶ **équitable** \leadsto chaque agent attend un « retour sur investissement » en rapport avec sa contribution financière.

Une constellation de satellites (2)

- ▶ Les agents : agences militaires et civiles de chaque pays.
- ▶ La ressource : l'exploitation du satellite (demandes d'images).
- ▶ L'expression des préférences : demandes pondérées et / ou niveaux de priorités.
- ▶ Contraintes : contraintes physiques (fenêtres temporelles, temps de transition, images particulières – stéréo, ... –, mémoire, énergie,...)
- ▶ Critère de qualité du partage : efficacité et équité.

Dans d'autres domaines. . .

- ▶ Répartition de soins et de médicaments à des malades (guerre, catastrophe naturelle, . . .) ;
- ▶ Gestion de ressources naturelles renouvelables (eau, ressources cynégétiques, bois, plantations, pâturages, . . .)
[<http://cormas.cirad.fr>].

Le problème de partage équitable de ressources : modélisation et applications.

Quelques applications concrètes du problème de partage

Les éléments d'un problème de partage

- La ressource

- Contraintes sur la ressource

- Préférences et expression compacte

- Le bien-être social

- Autres éléments

Problème de partage avec préférences numériques

- Le langage de représentation

- La complexité

La recherche de l'absence d'envie

- Représentation logique du problème

- Complexité

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les contraintes sur la ressource ;
- ▶ Les préférences des agents ;
- ▶ Le bien-être collectif ;
- ▶ Autres paramètres divers.

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les contraintes sur la ressource ;
- ▶ Les préférences des agents ;
- ▶ Le bien-être collectif ;
- ▶ Autres paramètres divers.

Nature de la ressource

- ▶ Divisibilité des ressources :
 - ▶ Ressource continue. \leadsto *Découpage de gâteau, partage d'une somme d'argent, choix de l'emplacement d'un bien commun, partage de territoire...*
 - ▶ Ressource indivisible \leadsto *Partage d'un ensemble d'objets entre plusieurs personnes, enchères, Pléiades...*
 - ▶ Ressource discrète (cas particulier de ressource indivisible)
 - ▶ Ressource mixte \leadsto *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*
- ▶ Possibilité de compensations monétaires *a posteriori* \leadsto *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*

Nature de la ressource

- ▶ Divisibilité des ressources :
 - ▶ Ressource continue. \leadsto *Découpage de gâteau, partage d'une somme d'argent, choix de l'emplacement d'un bien commun, partage de territoire...*
 - ▶ Ressource indivisible \leadsto *Partage d'un ensemble d'objets entre plusieurs personnes, enchères, Pléiades...*
 - ▶ Ressource discrète (cas particulier de ressource indivisible)
 - ▶ Ressource mixte \leadsto *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*
- ▶ Possibilité de compensations monétaires *a posteriori* \leadsto *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*

Partage

Partage $\vec{\pi} \in 2^{\mathcal{O}^n}$.

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les préférences des agents ;
- ▶ Le bien-être collectif ;
- ▶ Autres paramètres divers.

Contraintes sur la ressource

- ▶ contraintes de préemption entre objets \leadsto un objet ne peut être attribué qu'à une seule personne,
 - ▶ en générale présente lorsqu'il s'agit d'objets physiques,
 - ▶ absente par exemple dans le cas d'objets virtuels (photographies numériques, licences d'utilisation de logiciels, ...)
- ▶ contraintes d'exclusion \leadsto deux objets donnés ne peuvent être simultanément attribués,
- ▶ contraintes de volume \leadsto on ne peut attribuer plus d'un certain nombre, ou « volume » d'objets,
- ▶ contraintes de faisabilité physique,
- ▶ contraintes de dépendances quelconques entre agents.

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les contraintes sur la ressource ;
- ▶ Le bien-être collectif ;
- ▶ Autres paramètres divers.

Les préférences

Dans un problème de partage, chaque agent doit exprimer ses préférences sur l'ensemble des partages possibles.

Hypothèse (préférences non exogènes) : Chaque agent n'exprime ses préférences que sur les allocations qu'il reçoit (en particulier, il ne tient pas compte de ce qu'obtiennent les autres agents dans le partage).

ensemble des alternatives = ensemble des parts possibles. pour l'agent i : $\mathcal{X} = \{\pi_i \text{ allocation pour l'agent } i\}$.

Comment exprimer une préférence ?

Préférence : satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- ▶ préférences dichotomiques,
- ▶ préférences ordinales,
- ▶ préférences cardinales.

Comment exprimer une préférence ?

Préférence : satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- ▶ préférences dichotomiques,
- ▶ préférences ordinales,
- ▶ préférences cardinales.
- ▶ un ensemble de « bonnes » parts,

Structure de préférences dichotomique

Structure de préférences dichotomique sur \mathcal{X} : $\mathcal{X}_G \subseteq \mathcal{X}$

Comment exprimer une préférence ?

Préférence : satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- ▶ préférences dichotomiques,
- ▶ préférences ordinales,
- ▶ préférences cardinales.

- ▶ un ensemble de « bonnes » parts,
- ▶ un préordre sur l'ensemble des parts,

Structure de préférences ordinale

Structure de préférences ordinale sur \mathcal{X} : préordre \preceq sur \mathcal{X} .

Comment exprimer une préférence ?

Préférence : satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- ▶ préférences dichotomiques,
- ▶ préférences ordinales,
- ▶ **préférences cardinales.**

- ▶ un ensemble de « bonnes » parts,
- ▶ un préordre sur l'ensemble des parts,
- ▶ une fonction d'utilité.

Structure de préférences cardinale

Structure de préférences cardinale sur \mathcal{X} : structure de valuations \mathcal{V} et fonction d'utilité $u : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V}$.

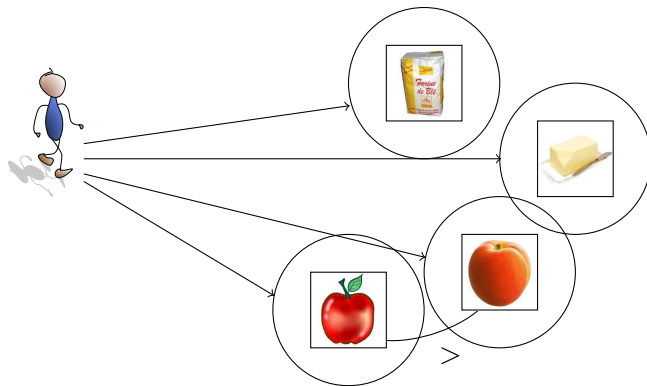
Expression des préférences

Ensemble des objets et ensemble des alternatives ?



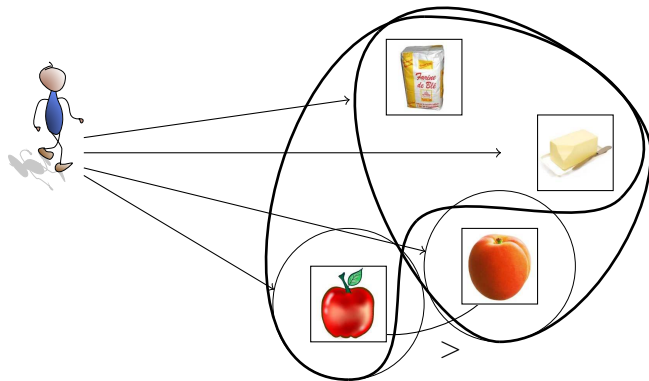
Expression des préférences

Ensemble des objets et ensemble des alternatives ?



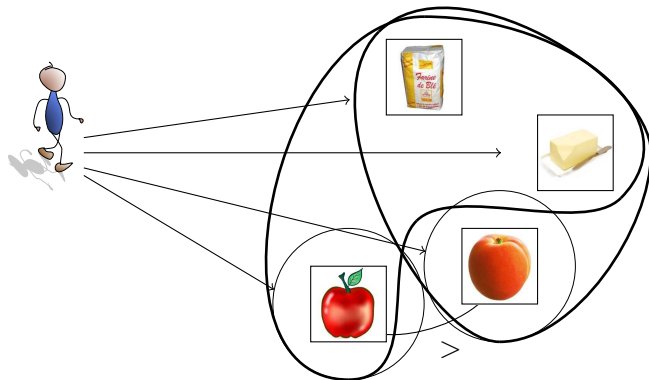
Expression des préférences

Ensemble des objets et ensemble des alternatives ?



Expression des préférences

Ensemble des objets et ensemble des alternatives ?



~> Besoin d'exprimer des dépendances préférentielles entre objets.

Explosion combinatoire

Un repas au restaurant...

- ▶ 8 entrées ;
- ▶ 10 plats de résistance ;
- ▶ 5 fromages ;
- ▶ 4 desserts ;
- ▶ 5 vins disponibles en 3 quantités ;
- ▶ préférences interdépendantes ;
- ▶ On choisit au plus une seule possibilité pour chaque item.

Explosion combinatoire

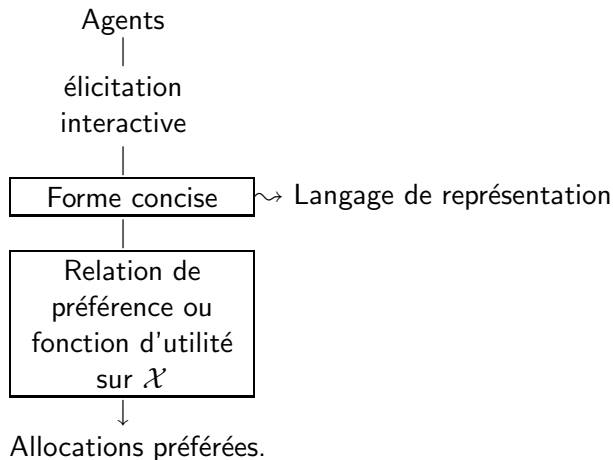
Un repas au restaurant...

- ▶ 8 entrées ;
- ▶ 10 plats de résistance ;
- ▶ 5 fromages ;
- ▶ 4 desserts ;
- ▶ 5 vins disponibles en 3 quantités ;
- ▶ préférences interdépendantes ;
- ▶ On choisit au plus une seule possibilité pour chaque item.

~→ 47520 possibilités !

Nécessité d'un langage compact !

Expression compacte des préférences



Comment juger de la pertinence d'un langage ?

- ▶ Élicitation / Intuitivité cognitive : l'expression de préférences dans un langage est-elle proche de l'intuition humaine ?
- ▶ Puissance expressive [Coste-Marquis et al. 2004] : un langage L peut-il exprimer tous les préordres possibles ?
- ▶ Concision [Coste-Marquis et al. 2004] : existe-t-il une traduction de taille polynomiale de R_1 à R_2 ?
- ▶ Complexité computationnelle [Lang 2004] : les tâches basiques (comparaison d'alternatives, non-dominance, ...) sont-elles difficiles ?

Langages d'expression compacte des préférences

- ▶ Préférences dichotomiques :
 - ▶ représentation logique des préférences dichotomiques.
- ▶ Préférences ordinales :
 - ▶ buts priorisés (best-out, discrimin, leximin...),
 - ▶ CP-nets.
- ▶ Préférences cardinales :
 - ▶ langage k -additif,
 - ▶ langage à base de buts pondérés,
 - ▶ langages de lots pour les enchères combinatoires,
 - ▶ UCP-nets,
 - ▶ CSP valués.

Langages d'expression compacte des préférences

- ▶ Préférences dichotomiques :
 - ▶ représentation logique des préférences dichotomiques.
- ▶ Préférences ordinales :
 - ▶ buts priorisés (best-out, discrimin, leximin...),
 - ▶ CP-nets.
- ▶ Préférences cardinales :
 - ▶ langage k -additif,
 - ▶ langage à base de buts pondérés,
 - ▶ langages de lots pour les enchères combinatoires,
 - ▶ UCP-nets,
 - ▶ CSP valués.

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les contraintes sur la ressource ;
- ▶ Les préférences des agents ;
- ▶ Autres paramètres divers.

Le *welfarism*

La théorie du bien-être social traite le problème de décision collective en attachant à chaque alternative faisable le vecteur des utilités individuelles (u_1, \dots, u_n) .

Ordre de bien-être social (SWO)

Un **ordre de bien-être social** est un préordre \preceq sur \mathcal{V}^n .

Un SWO reflète l'ordre de préférences collectif vis-à-vis de l'ensemble des partages possibles.

Fonction d'utilité collective (CUF)

Une **fonction d'utilité collective** est une fonction de \mathcal{V}^n dans \mathcal{V} .

Une fonction d'utilité collective représente un SWO particulier.

Propriétés basiques des SWO

Unanimité

Un vecteur d'utilités \vec{u} **Pareto-domine** un autre vecteur d'utilités \vec{v} ssi $\forall i, u_i \geq v_i$ et $\exists i$ t.q. $u_i > v_i$.

Un vecteur non Pareto-dominé est dit **Pareto-efficace**.

Un SWO \preceq satisfait l'**unanimité** ssi si \vec{u} Pareto-domine \vec{v} , alors $\vec{u} \succ \vec{v}$.

Anonymat

Un SWO garantit l'**anonymat** ssi il est indifférent entre un partage et ce même partage dans lequel on a permuté les parts entre les agents.

L'équité dans les partages

- ▶ Propriétés des SWO :
 - ▶ Anonymat.
 - ▶ Juste part garantie.
 - ▶ Réduction des inégalités.
- ▶ Propriétés des partages :
 - ▶ Test de juste part.
 - ▶ Test d'absence d'envie.
 - ▶ Lorenz-efficacité.
 - ▶ Indice d'inégalité.

L'équité dans les partages

- ▶ Propriétés des SWO :
 - ▶ Anonymat.
 - ▶ **Juste part garantie.**
 - ▶ Réduction des inégalités.
- ▶ Propriétés des partages :
 - ▶ **Test de juste part.**
 - ▶ Test d'absence d'envie.
 - ▶ Lorenz-efficacité.
 - ▶ Indice d'inégalité.

Juste part

Un partage satisfait la juste part ssi chaque agent a au moins le $n^{\text{ème}}$ de ce qu'il aurait obtenu s'il était seul.

L'équité dans les partages

- ▶ Propriétés des SWO :
 - ▶ Anonymat.
 - ▶ Juste part garantie.
 - ▶ Réduction des inégalités.
- ▶ Propriétés des partages :
 - ▶ Test de juste part.
 - ▶ **Test d'absence d'envie.**
 - ▶ Lorenz-efficacité.
 - ▶ Indice d'inégalité.

Absence d'envie

Un partage est sans envie ssi chaque agent est autant ou plus satisfait avec sa propre part qu'il ne le serait avec la part d'un autre.

L'équité dans les partages

- ▶ Propriétés des SWO :
 - ▶ Anonymat.
 - ▶ Juste part garantie.
 - ▶ Réduction des inégalités.
- ▶ Propriétés des partages :
 - ▶ Test de juste part.
 - ▶ Test d'absence d'envie.
 - ▶ Lorenz-efficacité.
 - ▶ Indice d'inégalité.

Réduction des inégalités

Soient \vec{u} et \vec{v} tels que $\forall k \neq i, j, u_k = v_k, u_i < \{v_i, v_j\} < u_j$ et $u_i + u_j = v_i + v_j$ (transfert de Pigou-Dalton). \preceq réduit les inégalités ssi $u \prec v$.

Courbe de Lorenz : $\overrightarrow{L(\vec{u})} = \langle u_1^\uparrow, \dots, \sum_{k=1}^i u_k^\uparrow, \dots, \sum_{k=1}^n u_k^\uparrow \rangle$.

L'équité dans les partages

- ▶ Propriétés des SWO :
 - ▶ Anonymat.
 - ▶ Juste part garantie.
 - ▶ Réduction des inégalités.
- ▶ Propriétés des partages :
 - ▶ Test de juste part.
 - ▶ Test d'absence d'envie.
 - ▶ Lorenz-efficacité.
 - ▶ **Indice d'inégalité.**

Indices d'inégalités : exemples

Indice de Gini, famille d'indices d'Atkinson...

Fonctions d'utilité et ordres sociaux classiques

- ▶ Fonction d'utilité collective utilitariste.
- ▶ Fonction d'utilité collective égalitariste.
- ▶ Ordre social leximin.
- ▶ Fonction d'utilité collective de Nash.

Fonctions d'utilité et ordres sociaux classiques

- ▶ Fonction d'utilité collective utilitariste.
- ▶ Fonction d'utilité collective égalitariste.
- ▶ Ordre social leximin.
- ▶ Fonction d'utilité collective de Nash.

CUF utilitariste [Rawls]

$$g(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Propriétés

Les agents sont des “producteurs” d'utilité.

Satisfait l'anonymat et l'unanimité, mais pas la juste part.

Indifférente aux inégalités.

Fonctions d'utilité et ordres sociaux classiques

- ▶ Fonction d'utilité collective utilitariste.
- ▶ Fonction d'utilité collective égalitariste.
- ▶ Ordre social leximin.
- ▶ Fonction d'utilité collective de Nash.

CUF égalitariste [Harsanyi]

$$g(\vec{u}) = \min_{i=1}^n u_i.$$

Propriétés

Garantit l'anonymat et la juste part.

Indifférente aux inégalités.

ne satisfait pas le principe d'unanimité.

Fonctions d'utilité et ordres sociaux classiques

- ▶ Fonction d'utilité collective utilitariste.
- ▶ Fonction d'utilité collective égalitariste.
- ▶ **Ordre social leximin.**
- ▶ Fonction d'utilité collective de Nash.

SWO leximin

$$\vec{u} \succ_{\text{leximin}} \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \text{ tel que } \forall i \leq k, u_i^\uparrow = v_i^\uparrow \text{ et } u_{k+1}^\uparrow > v_{k+1}^\uparrow.$$

Propriétés

Satisfait l'anonymat et l'unanimité.

Réduit les inégalités.

Fonctions d'utilité et ordres sociaux classiques

- ▶ Fonction d'utilité collective utilitariste.
- ▶ Fonction d'utilité collective égalitariste.
- ▶ Ordre social leximin.
- ▶ Fonction d'utilité collective de Nash.

CUF de Nash

$$g(\vec{u}) = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Propriétés

Respecte l'unanimité et l'anonymat.

Réduit les inégalités.

Indépendant des échelles individuelles d'utilité.

Familles de fonctions d'utilité collective.

- ▶ Moyennes pondérées ordonnées.
- ▶ Somme des exposants.

Familles de fonctions d'utilité collective.

► Moyennes pondérées ordonnées.

► Somme des exposants.

Moyennes pondérées ordonnées[Yager 1988]

Si \vec{u}^\uparrow est le vecteur des utilités individuelles ordonnées par ordre croissant, et \vec{w} est un vecteur de poids,

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i u_i^\uparrow(\pi) > \sum_{i=1}^n w_i u_i^\uparrow(\pi').$$

Si $\vec{w} = \langle 1, \dots, 1 \rangle$, le critère est utilitariste.

Si $\vec{w} = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$, le critère est égalitariste (min).

Familles de fonctions d'utilité collective.

- Moyennes pondérées ordonnées.
- Somme des exposants.

Somme des exposants [Roberts 1980]

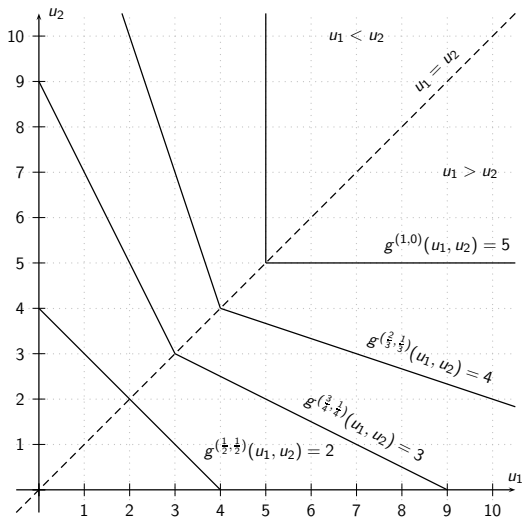
$g_p(\vec{u}) = \operatorname{sgn}(p) \sum_{i=1}^n (u_i)^p$, pour $p \in \mathbb{R}^*$. Pour $p = 0$, on prolonge par « continuité » avec $\sum_{i=1}^n \log(u_i)$.

Si $p = 1$, le critère est utilitariste.

Si $p = 0$, le critère est celui de Nash.

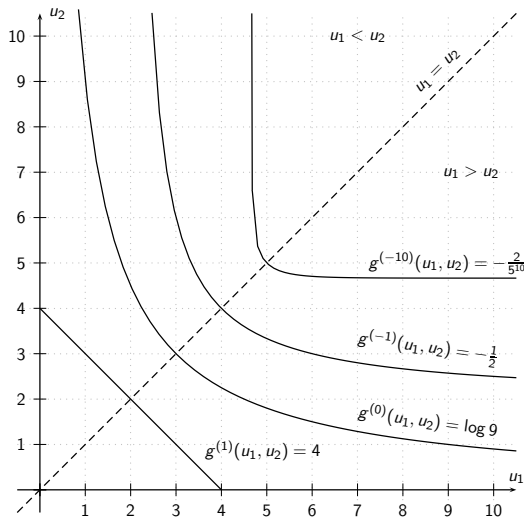
Pour $p \rightarrow -\infty$, le critère tend vers l'ordre social leximin.

Les moyennes pondérées ordonnées



Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille OWA: $g^{(1,0)}$, $g^{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}$, $g^{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}$ et $g^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$.

La famille somme des puissances



Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille somme des puissances: $g^{(1)}$, $g^{(0)}$, $g^{(-1)}$ et $g^{(-10)}$.

SWO et CUF classiques et propriétés

CUF ou SWO	Σ	min	leximin	Nash
Unanimité	oui	non	oui	oui
Anonymat	oui	oui	oui	oui
Juste part garantie	non	oui	oui	?
Réd. des Inégalités	indifférente	réd. ou indif.	oui	non

Somme pondérée	$p < 0$	$p \in]0, 1[$	$p > 1$
Unanimité	oui	oui	oui
Anonymat	oui	oui	oui
Juste part garantie	?	?	?
Réd. des Inégalités	oui	oui	augmente

Éléments d'un problème de partage

- ▶ La ressource ;
- ▶ Les contraintes sur la ressource ;
- ▶ Les préférences des agents ;
- ▶ Le bien-être collectif ;

Autres paramètres entrant en ligne de compte

- ▶ Introduction de droits exogènes inégaux entre les agents ;
- ▶ Possibilités de régulation temporelle en cas de partages répétés dans le temps (Pléiades par exemple).

Autres paramètres entrant en ligne de compte

- ▶ Introduction de droits exogènes inégaux entre les agents ;
- ▶ Possibilités de régulation temporelle en cas de partages répétés dans le temps (Pléiades par exemple).



Le problème de partage équitable de ressources : modélisation et applications.

Quelques applications concrètes du problème de partage

Les éléments d'un problème de partage

- La ressource

- Contraintes sur la ressource

- Préférences et expression compacte

- Le bien-être social

- Autres éléments

Problème de partage avec préférences numériques

- Le langage de représentation

- La complexité

La recherche de l'absence d'envie

- Représentation logique du problème

- Complexité

Le problème de partage avec préférences numériques

Nous nous intéressons à un problème particulier :

- ▶ Partage de biens indivisibles.
- ▶ Les agents ont des préférences numériques (cardinales).
- ▶ Les agents sont capables d'exprimer des demandes complexes.
- ▶ Un certain nombre de contraintes sont présentes (pas forcément la contrainte de préemption).

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des agents

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des **agents**

- ▶ Ensemble d'agents $N = \{1, \dots, n\}$.

Agents, objets et partage

Partage de **biens indivisibles** entre des agents

- ▶ Ensemble d'agents $N = \{1, \dots, n\}$.
- ▶ Ensemble d'objets \mathcal{O} (un lot est un sous-ensemble de \mathcal{O}).

Agents, objets et partage

Partage de biens indivisibles entre des agents

- ▶ Ensemble d'agents $N = \{1, \dots, n\}$.
- ▶ Ensemble d'objets \mathcal{O} (un lot est un sous-ensemble de \mathcal{O}).
- ▶ Partage $\vec{\pi} = \langle \pi_1, \dots, \pi_n \rangle$ (π_i est la part de l'agent i).

Expression des contraintes

Un langage propositionnel $L_{\mathcal{O}}^{alloc}$:

- ▶ ensemble des symboles propositionnels $\{alloc(o, i) | o \in \mathcal{O}, i \in N\}$.
- ▶ ensemble des connecteurs usuels \neg, \wedge, \vee

Définition [Contrainte]

Une contrainte est une formule de $L_{\mathcal{O}}^{alloc}$.

Exemple

La contrainte de préemption s'exprime :

$$\neg(alloc(o, i) \wedge alloc(o, j)) | i, j \in N, i \neq j$$

Le langage d'expression des préférences

Les agents expriment leurs préférences sous forme de formules pondérées.

- ▶ Un langage propositionnel $L_{\mathcal{O}}$...
 - ▶ ensemble des symboles propositionnels \mathcal{O} ,
 - ▶ ensemble des connecteurs usuels \neg, \wedge, \vee
- ▶ ...et des poids $w \in \mathbb{N}$.

Demande pondérée

Une demande pondérée est un couple (φ, w) . L'ensemble des demandes de l'agent i est noté Δ_i .

Dans la suite, on se limitera à $L_{\mathcal{O}}^+$, l'ensemble des formules non négatives de $L_{\mathcal{O}}$ (l'obtention d'un objet n'a pas d'influence « négative »).

Le langage d'expression des préférences

Exemple (suite)

- ▶ $\mathcal{O} = \{farine, beurre, pommes, abricots\},$
- ▶ Demandes de l'agent 1 :
 - ▶ $\langle pommes \vee abricots, 3 \rangle,$
 - ▶ $\langle farine \wedge beurre \wedge (pommes \vee abricots), 5 \rangle,$
 - ▶ $\langle pommes, 2 \rangle,$

Utilité individuelle

L'utilité individuelle d'un agent exprime sa satisfaction vis-à-vis d'un partage. Elle dépend :

- ▶ de la part qu'il obtient dans le partage (et uniquement de sa part),
- ▶ des demandes pondérées qu'il a formulées.

Utilité individuelle

Définition [utilité individuelle]

Étant donné un agent i , son ensemble de demandes pondérées Δ_i , et un partage $\vec{\pi}$, l'utilité individuelle de i s'exprime comme suit :

$$u_i(\vec{\pi}) = \bigoplus_{\{w \mid \langle \varphi, w \rangle \in \Delta_i \text{ et } \pi_i \models \varphi\}} w,$$

avec \oplus une loi interne non-décroissante, commutative et associative sur \mathbb{N} .

Exemples de fonctions d'agrégation individuelle

- Le choix le plus évident : $\oplus = +$.
- Lorsque les agents ne veulent qu'un seul objet : $\oplus = \max$.

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- ▶ $\mathcal{O} = \{farine, beurre, pommes, abricots\}$,
- ▶ Demandes de l'agent 1 :
 - ▶ $\langle pommes \vee abricots, 3 \rangle$,
 - ▶ $\langle farine \wedge beurre \wedge (pommes \vee abricots), 5 \rangle$,
 - ▶ $\langle pommes, 2 \rangle$,

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$\pi_1 = \{abricots, farine, beurre\} \Rightarrow$$

$$u_1(\vec{\pi}) = \overset{pommes \vee abricots}{\textcolor{red}{3}}$$

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- ▶ $\mathcal{O} = \{farine, beurre, pommes, abricots\}$,
- ▶ Demandes de l'agent 1 :
 - ▶ $\langle pommes \vee abricots, 3 \rangle$,
 - ▶ $\langle farine \wedge beurre \wedge (pommes \vee abricots), 5 \rangle$,
 - ▶ $\langle pommes, 2 \rangle$,

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$\pi_1 = \{abricots, farine, beurre\} \Rightarrow$$

$$u_1(\vec{\pi}) = 3 \oplus \overset{farine \wedge beurre \wedge (pommes \vee abricots)}{5}$$

Utilité individuelle

Exemple (suite)

- ▶ $\mathcal{O} = \{farine, beurre, pommes, abricots\}$,
- ▶ Demandes de l'agent 1 :
 - ▶ $\langle pommes \vee abricots, 3 \rangle$,
 - ▶ $\langle farine \wedge beurre \wedge (pommes \vee abricots), 5 \rangle$,
 - ▶ $\langle pommes, 2 \rangle$,

Exemple de calcul de l'utilité individuelle :

$$\pi_1 = \{abricots, farine, beurre\} \Rightarrow$$

$$u_1(\vec{\pi}) = 3 \oplus 5 \oplus \overset{pommes}{0} = 8$$

Utilité collective

L'utilité collective (la satisfaction globale de la société d'agents) s'exprime comme une agrégation des utilités individuelles.

Définition [Utilité collective]

Étant donné un partage $\vec{\pi}$, un ensemble d'agents N et leurs utilités individuelles,

$$uc(\vec{\pi}) = g(u_1(\vec{\pi}), \dots, u_n(\vec{\pi})),$$

avec g fonction commutative et non-décroissante de \mathbb{N}^n dans \mathbb{N} .

Utilité collective

L'utilité collective (la satisfaction globale de la société d'agents) s'exprime comme une agrégation des utilités individuelles.

Exemples de fonctions d'agrégation collective

- ▶ $g = +$: utilitarisme.
- ▶ $g = \min$: égalitarisme.
- ▶ $g = \times$: Nash.
- ▶ fonctions intermédiaires (moyennes pondérées ordonnées, somme des puissances...).

Utilité collective

L'utilité collective (la satisfaction globale de la société d'agents) s'exprime comme une agrégation des utilités individuelles.
Le calcul de l'utilité collective passe donc par deux niveaux d'agrégation :

$$\left. \begin{array}{ccc} w_1^1, \dots, w_{p_1}^1 & \xrightarrow{\oplus} & u_1 \\ \vdots & & \\ w_1^n, \dots, w_{p_n}^n & \xrightarrow{\oplus} & u_n \end{array} \right\} \xrightarrow{g} u_c.$$

Le problème de partage avec préférences numériques

En résumé :

Instance du problème de partage

Une instance du problème de partage consiste en :

- ▶ un ensemble fini d'agents $N = \{1, \dots, n\}$ exprimant des demandes pondérées Δ_i ,
- ▶ un ensemble fini d'objets \mathcal{O} ,
- ▶ un ensemble fini de contraintes \mathcal{C} ,
- ▶ un couple de fonctions d'agrégation (\oplus, g) .

Le résultat d'un problème de partage est un partage admissible qui maximise l'utilité collective.

Partage de biens indivisibles

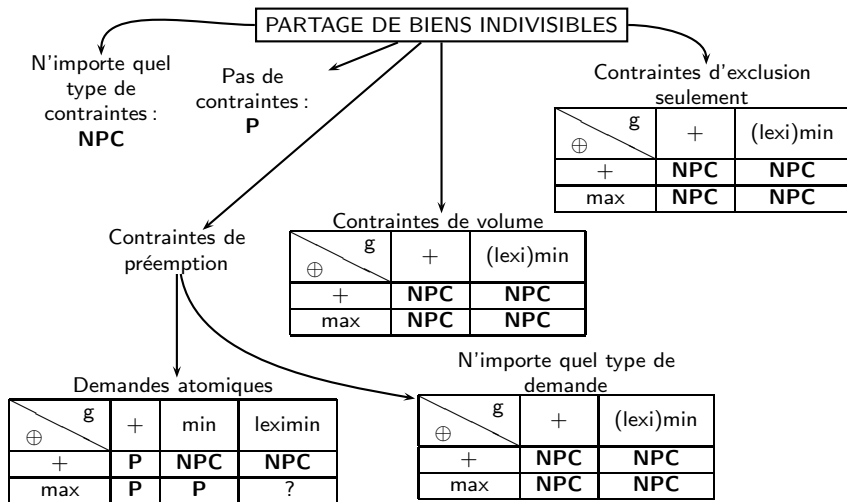
On s'intéresse à la complexité du problème suivant :

Définition [PARTAGE DE BIENS INDIVISIBLES]

Étant donnés une instance du problème de partage et un entier K , existe-t-il un partage admissible $\vec{\pi}$ tel que $uc(\vec{\pi}) \geq K$?

Ce problème est dans **NP**.

Les résultats de complexité obtenus



Le problème de partage équitable de ressources : modélisation et applications.

Quelques applications concrètes du problème de partage

Les éléments d'un problème de partage

- La ressource

- Contraintes sur la ressource

- Préférences et expression compacte

- Le bien-être social

- Autres éléments

Problème de partage avec préférences numériques

- Le langage de représentation

- La complexité

La recherche de l'absence d'envie

- Représentation logique du problème

- Complexité

Complexité de l'absence d'envie et de l'efficacité de Pareto

Étude de la complexité du problème suivant :

Existence d'un partage efficace et sans-envie (EEF)

Entrées :

- ▶ Un ensemble N de n agents.
- ▶ Un ensemble \mathcal{O} d'objets.
- ▶ Un ensemble $\mathcal{R} = \langle R_1, \dots, R_n \rangle$ de relations de préférences.

Question :

Existe-t-il un partage des objets (un objet ne pouvant être attribué qu'à un agent au plus) Pareto-efficace et sans-envie ?

Représentation logique des préférences dichotomiques

Une structure de préférences dichotomique est représentée de manière exhaustive par son ensemble de bonnes parts. Cet ensemble peut être de manière assez évidente représenté par une formule propositionnelle.

Exemple

L'ensemble des objets est $\mathcal{O} = \{a, b, c\}$.

$$G = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \rightsquigarrow \varphi = (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c).$$

$$G = \{\{b\}\{b, c\}\} \rightsquigarrow \varphi = b \wedge \neg a.$$

Représentation logique du problème

- ▶ La contrainte de préemption est représentée par une formule logique Γ .
- ▶ La propriété d'absence d'envie est représentée par une formule logique Λ .
- ▶ La propriété de Pareto-efficacité est représentée par la maximalité pour l'inclusion de la satisfaction d'un ensemble de formules Φ .

Problème EEF

Le problème d'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie lorsque les agents ont des préférences dichotomiques (EEF) est équivalent à celui de l'existence d'un sous-ensemble $S \subset \Phi$ maximal Γ -consistant tel que $\bigwedge S \wedge \Gamma \wedge \Lambda$ est consistant.

Le lien avec l'inférence sceptique

Il s'agit d'une instance d'un problème connu en raisonnement non monotone : l'inférence sceptique en théorie des défauts.

Le but de la logique des défauts [Reiter 1980] est de bâtir un cadre pour les lois générales à exceptions. Le cas des défauts normaux sans prérequis est fondé sur :

- ▶ un fait \leadsto formule logique β ,
- ▶ des défauts normaux sans prérequis \leadsto un ensemble de formules logiques que nous prenons pour vraies si rien ne nous en empêche.

Nous recherchons l'ensemble maximal de défauts qui sont consistents avec le fait.

Le lien avec l'inférence sceptique

Il s'agit d'une instance d'un problème connu en raisonnement non monotone : l'inférence sceptique en théorie des défauts.

Problème EEF

Le problème d'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie lorsque les agents ont des préférences dichotomiques (EEF) est équivalent à :

A-t-on $\langle \Gamma, \Phi \rangle \not\sim^{\forall} \neg \Lambda$?

Complexité du problème EEF

Proposition

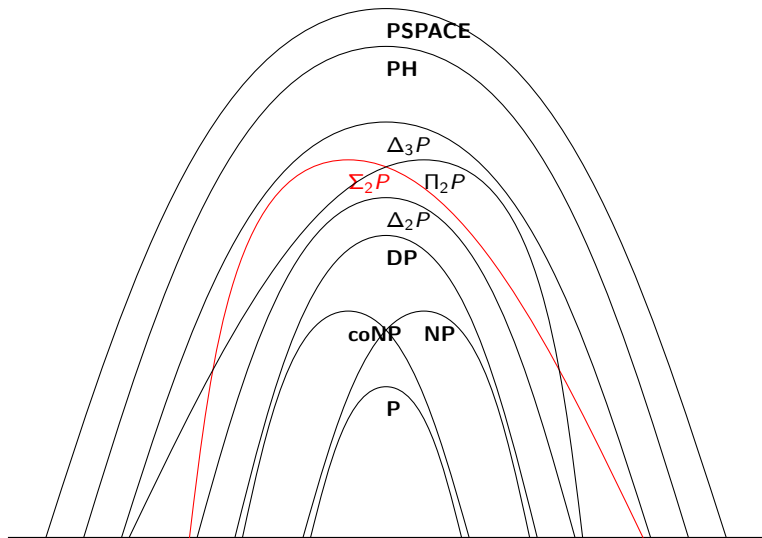
- ▶ Le problème EEF EXISTENCE d'allocation de ressources à des agents avec préférences monotones¹ dichotomiques exprimées sous forme logique ou équivalente est Σ_2^P -complet.
- ▶ Le problème EEF EXISTENCE d'allocation de ressources à des agents avec préférences monotones exprimées sous forme logique ou équivalente est Σ_2^P -complet.

Définition

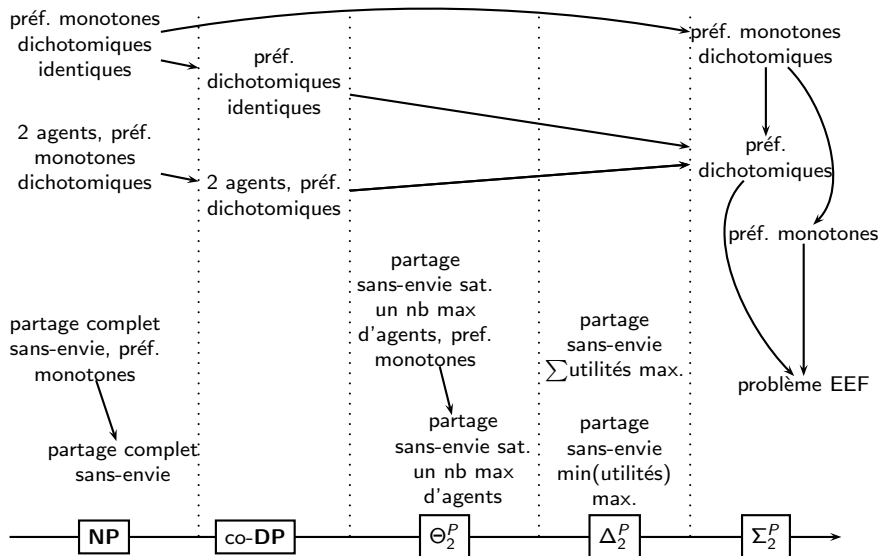
$\Sigma_2^P = \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$, classe des langages reconnaissables en tps polynômial par une machine de Turing non déterministe à oracles \mathbf{NP} .

1. i.e. aucun objet n'a une influence « négative » sur la satisfaction d'un agent

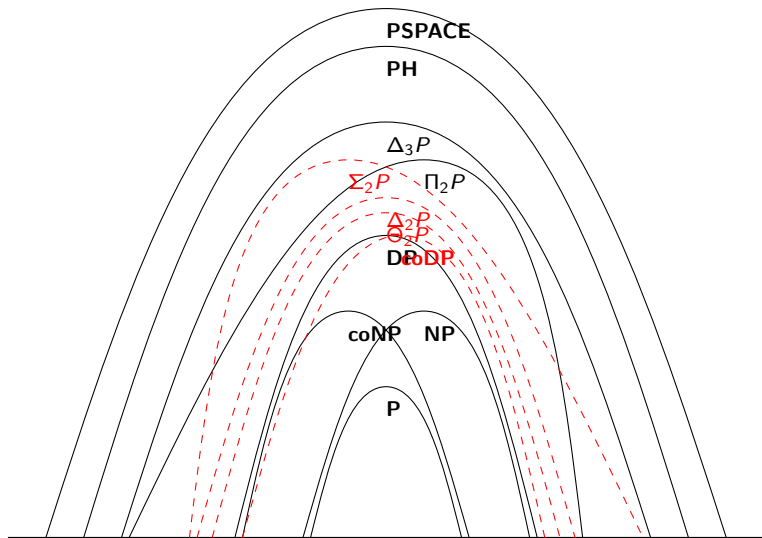
La classe Σ_2^P



Les résultats de complexité obtenus



Quelques classes de complexité



Travaux en cours ou futurs

Du côté de la modélisation...

- ▶ Modélisation du problème de partage avec droits inégaux ;
- ▶ Problème de la régulation temporelle.

Du côté des langages de représentation...

- ▶ Étude d'autres langages (CP-nets,...)

Du côté de l'informatique...

- ▶ Quelques résultats de complexité restent à prouver
- ▶ L'algorithmique est à étudier.

Merci de votre attention

Transparents (prochainement) disponibles à l'URL :
<http://www.cert.fr/dcsd/THESES/sbouveret/ressources/GREYC/>
ou par mail :
sylvain.bouveret@cert.fr