Liste des figures et tableaux

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles

Annexe A
Complexité computationnelle : liste des classes et problèmes

Ce chapitre d'annexe a pour vocation de présenter les classes de complexité utilisées tout au long du document. Nous présentons aussi les problèmes canoniques associés à chaque classe de complexité, ainsi que la liste des problèmes de décision utilisés dans les démonstrations, associés à leur classe de complexité. Nous supposons que le lecteur est familier avec les notions fondamentales de théorie de la complexité : problèmes de décision, langage, machine de Turing, réduction polynomiale. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à des ouvrages de référence tels que [Papadimitriou, 1994; Garey et Johnson, 1979].

Pour tout problème de décision $\mathcal{P}$, nous notons $L_{\mathcal{P}}$ un langage «raisonnable» associé à $\mathcal{P}$, et co-$\mathcal{P}$ le problème complémentaire de $\mathcal{P}$. De même, pour une machine de Turing $\mathcal{M}$, on désigne par $L_{\mathcal{M}}$ le langage accepté par $\mathcal{M}$.

A.1 Classes de complexité

Définition A.1 (Classe P) *La classe* P *est formée de l'ensemble des problèmes $\mathcal{P}$ tels qu'il existe une machine de Turing déterministe $\mathcal{M}_D$ s'exécutant en temps polynômial telle que $L_{\mathcal{M}_D} = L_{\mathcal{P}}$.*

Définition A.2 (Classe NP) *La classe* NP *est formée de l'ensemble des problèmes $\mathcal{P}$ tels qu'il existe une machine de Turing non-déterministe $\mathcal{M}_{ND}$ s'exécutant en temps polynômial que $L_{\mathcal{M}_{ND}} = L_{\mathcal{P}}$.*

Le problème NP-complet canonique est le problème [SAT] :

Problème 19: [SAT] [Cook, 1971]

INSTANCE : Une formule booléenne φ en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
QUESTION : φ est-elle satisfiable ?

Définition A.3 (Classe DP) *Un problème $\mathcal{P}$ est dans la classe* DP *si et seulement si il existe un couple de problèmes $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ tels que :*

- ▷ $L_{\mathcal{P}} = L_{\mathcal{P}_1} \cap L_{\mathcal{P}_2}$,
- ▷ $\mathcal{P}_1 \in$ NP,
- ▷ $\mathcal{P}_2 \in$ *co*-NP

Remarquons que cette classe n'est *a priori* pas égale à $\mathsf{P} \cap \mathsf{NP}$, à moins que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Le problème DP canonique est le problème [SAT-UNSAT]

Problème 20: [SAT-UNSAT]

INSTANCE :	Un couple de formules booléennes (φ, φ') en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
QUESTION :	Est-il vrai que φ est satisfiable et φ' insatisfiable ?

Les classes de complexité suivantes requièrent la définition de la notion de machine de Turing à oracle :

Définition A.4 (Machine de Turing à oracle) *Étant donné un problème $\mathcal{P}$, une machine de Turing à oracle $\mathcal{P}$ est une machine de Turing multibande $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}$, qui possède un état particulier $q_{\mathcal{P}}$ et une bande particulière appelée bande de requête. Lorsqu'elle se trouve dans l'état $q_{\mathcal{P}}$, la machine de Turing passe en un temps unitaire dans un état q_{yes} ou dans un état q_{no}, selon que la chaîne contenue sur la bande de requête appartient à $L_{\mathcal{P}}$ ou pas.*

En d'autres termes, le fonctionnement d'une machine de Turing à oracle est identique à celui d'une machine de Turing normale, excepté le fait qu'elle a la capacité de deviner en un pas de temps la réponse à un problème donné (en faisant appel à un oracle). Pour toute classe de complexité temporelle déterministe ou non-déterministe $\mathbf{C}$, la classe $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$ désigne l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing du même type et avec la même borne temporelle que pour $\mathbf{C}$, mais avec un oracle de type $\mathcal{P}$.

Si $\mathbf{C}$ est une classe déterministe ou non-déterministe de complexité temporelle polynomiale (telle que P ou NP), $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$ est équivalente à n'importe quelle classe $\mathbf{C}^{\mathcal{P}'}$, pour peu que $\mathcal{P}$ puisse se réduire à $\mathcal{P}'$ en temps polynomial et vice-versa. Ainsi, étant donnée une classe de complexité $\mathbf{C}'$, nous notons $\mathbf{C}^{\mathbf{C}'}$ les classes de type $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$, avec $\mathcal{P} \in \mathbf{C}'$.

Définition A.5 (Hiérarchie polynomiale) *La hiérarchie polynomiale cumulative est l'ensemble des classes de complexité $\mathbf{PH} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\Delta_i, \Sigma_i, \Pi_i\}$ défini récursivement par :*

- ▷ $\Delta_0^p = \Sigma_0^p = \Pi_0^p = \mathsf{P}$
- ▷ $\forall i \geq 0$ *:*
  - $\Delta_{i+1}^p = \mathsf{P}^{\Sigma_i^p}$,
  - $\Sigma_{i+1}^p = \mathsf{NP}^{\Sigma_i^p}$,
  - $\Pi_{i+1}^p = co\text{-}\mathsf{NP}^{\Sigma_i^p}$.

Les problèmes canoniques des classes de la hiérarchie polynomiale s'expriment sous la forme de logique propositionnelle «quantifiée» (à chaque classe de la hiérarchie correspond une séquence précise de quantificateurs) :

Problème 21: [QSAT$_i$]

INSTANCE :	Un ensemble de variables booléennes partitionnés en i sous-ensembles $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i$, et une formule propositionnelle $\varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$.
QUESTION :	Existe-t-il une interprétation des variables de $\mathscr{X}_1$ telle que pour toute interprétation des variables de $\mathscr{X}_2$ il existe une interprétation des variables de $\mathscr{X}_3$, *et caetera* jusqu'à $\mathscr{X}_i$, telle que $\varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$ est satisfaite ? En d'autres termes, et par abus de notation, $\exists \mathscr{X}_1 \forall \mathscr{X}_2 \exists \mathscr{X}_3 \ldots Q \mathscr{X}_i \varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$ (avec Q désignant $\exists$ si i est pair et $\forall$ si i est impair) est-elle satisfiable ?

Parmi les classes de la hiérarchie polynomiale, les classes du deuxième niveau, Δ_2^{p}, Σ_2^{p} et Π_2^{p}, correspondant respectivement aux classes P^{NP}, $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ et $co\text{-}\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ sont de première importance, car

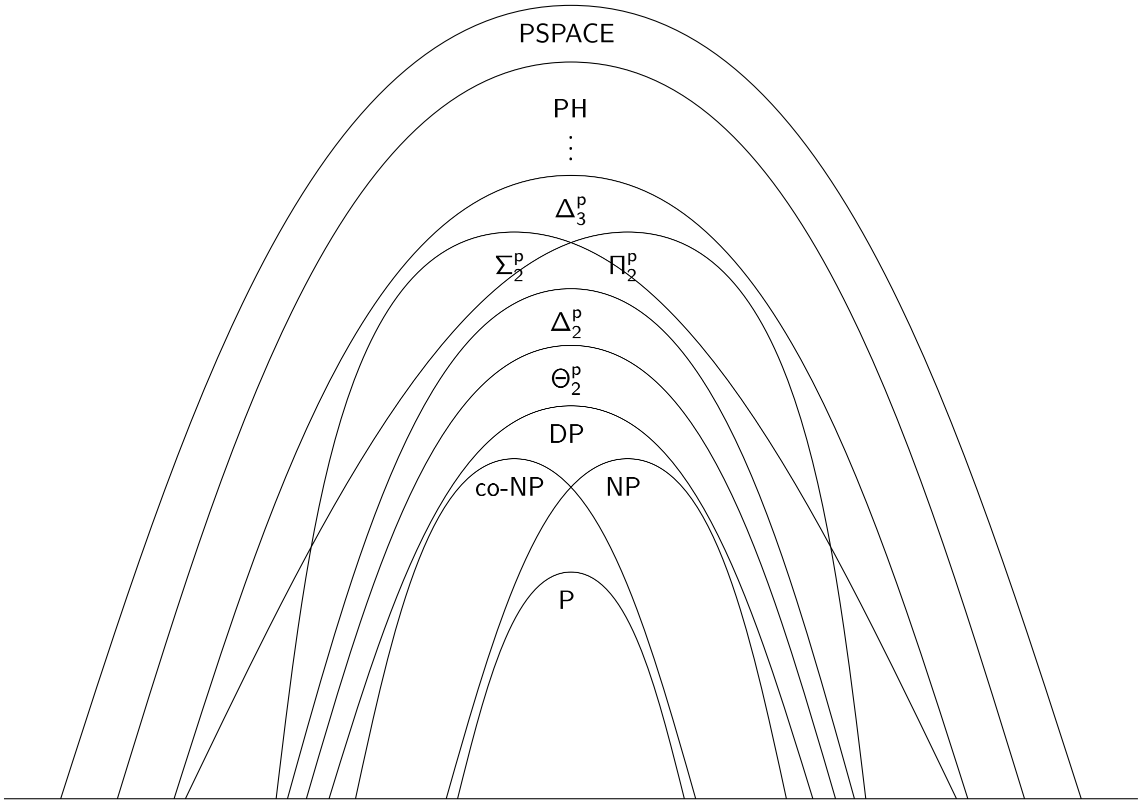

Figure A.1 — Schéma récapitulatif des classes de complexité introduites. Si $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, les inclusions de classes sont strictes.

elles correspondent à un ensemble de problèmes issus de l'étude du raisonnement en logique, donc historiquement liés à l'Intelligence Artificielle : raisonnement non-monotone, abduction...

Nous définissons enfin une sous-classe de Δ_2^{p}, qui correspond aux problèmes dont la résolution nécessite des oracles NP, mais dont le nombre est une fonction logarithmique de la taille des données d'entrée.

Définition A.6 (Classe Θ_2^p) *La classe Θ_2^p est formée de l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing déterministe $\mathcal{M}^{\mathsf{NP}}$ à oracle de type* NP *qui s'exécute en temps polynômial, et ne nécessitant qu'un nombre d'appels de l'ordre de $O(\log n)$ à l'oracle* NP.

Intuitivement, cette classe correspond aux problèmes impliquant des données numériques, et donc qui peuvent être traités par une recherche dichotomique. Nous pouvons citer comme représentant de cette classe une version du problème [UNWEIGHTED-MAX-SAT] :

Problème 22: [UNWEIGHTED-MAX-SAT]

INSTANCE : Un ensemble $\mathscr{C}$ de clauses et un entier K.
QUESTION : K est-il le nombre maximal de clauses simultanément satisfiables ?

Un résumé de l'ensemble des classes introduites est présenté sur la figure A.1.

A.2 Liste des problèmes introduits

Problème 1 (page 109) : Winner Determination Problem

- ▷ **Instance :** Un ensemble d'agents $\mathscr{N}$, un ensemble d'objets $\mathscr{O}$, un ensemble de fonctions d'utilité $(f_1, \ldots, f_n)$ exprimées sous forme de mises dans un langage d'enchères combinatoires, et un entier K.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un partage $\overrightarrow{\pi}$ des objets qui satisfait la contrainte de préemption et tel que $\sum_{i=1}^{n} f_i(\pi_i) \geq K$?

Problème 2 (page 130) : [RSI] (Restricted Skeptical Inference)

- ▷ **Instance :** Un ensemble de formules propositionnelles $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
- ▷ **Question :** Tous les ensembles maximaux-consitants de Δ contiennent-ils α_1 ?

Problème 3 (page 134) : [SET SPLITTING]

- ▷ **Instance :** Une collection $C = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n\}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini $\mathscr{S}$.
- ▷ **Question :** Existe-t-il une partition $\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \rangle$ de $\mathscr{S}$ telle qu'aucun des sous-ensembles de C n'est entièrement contenu ni dans $\mathscr{S}_1$ ni dans $\mathscr{S}_2$?

Problème 4 (page 140) : [EXACT COVER BY 3-SETS] [Karp, 1972]

- ▷ **Instance :** Un ensemble $\mathscr{S}$ de taille $3q$, et une collection $C = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{|C|}\}$ de sous-ensembles à 3 éléments de $\mathscr{S}$
- ▷ **Question :** C contient-il une couverture exacte pour $\mathscr{S}$, c'est-à-dire une sous-collection $C' \subseteq C$ telle que chaque élément de $\mathscr{S}$ apparaît dans exactement un membre de C' ?

Problème 5 (page 144) : [MAX-INDEX-SAT]$_{odd}$[Wagner, 1990]

- ▷ **Instance :** Une suite de formules propositionnelles $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ telle que (χ_i est insatisfiable) $\Rightarrow$ (χ_{i+1} est insatisfiable.)
- ▷ **Question :** L'index maximum i tel que χ_i est satisfiable est-il un nombre impair ?

Problème 6 (page 149) : [MAX-SAT-ASG]$_{even}$ [Wagner, 1987]

- ▷ **Instance :** Une formule propositionnelle χ en forme normale conjonctive, sur un ensemble de variables propositionnelles $V = \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, et une fonction poids w sur les interprétations $v : \mathit{Var} \rightarrow \{0, 1\}$, définie par $w(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i v(\mathbf{x_i}) \times 2^{i-1}$.
- ▷ **Question :** Est-ce que $\max_{M \text{ modèle de } \chi} w(M)$ est un nombre pair (en d'autres termes la variable $\mathbf{x_1}$ est-elle falsifiée dans le modèle de poids maximal) ?

Problème 7 (page 152) : [PARTITION]

- ▷ **Instance :** Un ensemble fini $\mathscr{S}$ et une taille $s(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in \mathscr{S}$.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} s(a) = \sum_{a \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'} s(a)$?

Problème 8 (page 156) : [MAX-CUF]

- ▷ **Instance :** Une instance $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\Delta_1, \ldots, \Delta_n), \mathscr{C}, \langle \mathscr{V}_{ind}, \geq_{ind}, \oplus \rangle, \langle \mathscr{V}, \geq, \rangle, g)$ du problème de partage de biens indivisibles et un élément $K \in \mathscr{V}$.
- ▷ **Question :** Existe-t-il une allocation admissible $\overrightarrow{\pi}$ telle que $u_c(\overrightarrow{\pi}) \geq K$?

Problème 9 (page 160) : [INDEPENDENT SET]

- ▷ **Instance :** Un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ et un entier K.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S} \subseteq V$ de taille au moins K tel que pour tout couple (v, v') d'éléments de $\mathscr{S}$, $(v, v') \notin E$ (autrement dit, v et v' ne sont pas connectés dans $\mathcal{G}$) ?

Problème 10 (page 161) : [SET PACKING]

- ▷ **Instance :** Une collection C d'ensembles finis, et un entier K.
- ▷ **Question :** Existe-t-il une sous-collection $C' \subseteq C$ d'ensembles disjoints tels que $|C'| \geq K$?

Problème 11 (page 163) : [MAXIMAL MATCHING]

- ▷ **Instance :** Un graphe bipartite pondéré $\mathcal{G}(V = N_1 \cup N_2, E)$, avec $w(v, v')$ désignant le poids d'une arête $\{v, v'\}$, et un entier K.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un couplage de poids supérieur ou égal à K, c'est-à-dire un sous-ensemble $E' \subseteq E$ tel que $\sum_{\{v,v'\} \in E'} w(v, v') \geq K$, et $\forall v \in V$, $\nexists (v', v'') \in V^2$ tel que $\{v, v'\} \in E'$ et $\{v, v''\} \in E'$?

Problème 12 (page 164) : [KNAPSACK]

- ▷ **Instance :** Un ensemble fini $\mathscr{S}$ une fonction de valeur $u : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$, une fonction de volume $v : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$, une capacité maximale v_{max} et un entier K.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} v(a) \leq v_{max}$ et $\sum_{a \in \mathscr{S}'} u(a) \geq K$?

Problème 13 (page 164) : [HITTING SET]

- ▷ **Instance :** Une collection C de sous-ensembles $\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n$ d'un ensemble $\mathscr{S}$ et un entier $K \leq |\mathscr{S}|$.
- ▷ **Question :** Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$, avec $|\mathscr{S}'| \leq K$, tel que $\mathscr{S}' \cap \mathscr{S}_i \neq \varnothing$ pour tout $\mathscr{S}_i \in C$?

Problème 14 (page 173) : [CSP]

- ▷ **Instance :** Un réseau de contraintes $(\mathscr{X}, \mathcal{D}, \mathscr{C})$.
- ▷ **Question :** $(\mathscr{X}, \mathcal{D}, \mathscr{C})$ a-t-il une solution (une instanciation complète cohérente) ?

Problème 19 (page 249) : [SAT] [Cook, 1971]

- ▷ **Instance :** Une formule booléenne φ en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
- ▷ **Question :** φ est-elle satisfiable ?

Problème 20 (page 250) : [SAT-UNSAT]

- ▷ **Instance :** Un couple de formules booléennes (φ, φ') en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
- ▷ **Question :** Est-il vrai que φ est satisfiable et φ' insatisfiable ?

Problème 21 (page 250) : [QSAT$_i$]

- ▷ **Instance :** Un ensemble de variables booléennes partitionnés en i sous-ensembles $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i$, et une formule propositionnelle $\varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$.
- ▷ **Question :** Existe-t-il une interprétation des variables de $\mathscr{X}_1$ telle que pour toute interprétation des variables de $\mathscr{X}_2$ il existe une interprétation des variables de $\mathscr{X}_3$, *et caetera* jusqu'à $\mathscr{X}_i$, telle que $\varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$ est satisfaite ? En d'autres termes, et par abus de notation, $\exists \mathscr{X}_1 \forall \mathscr{X}_2 \exists \mathscr{X}_3 \ldots Q\mathscr{X}_i \varphi(\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_i)$ (avec Q désignant $\exists$ si i est pair et $\forall$ si i est impair) est-elle satisfiable ?

Problème 22 (page 251) : [UNWEIGHTED-MAX-SAT]

- ▷ **Instance :** Un ensemble $\mathscr{C}$ de clauses et un entier K.
- ▷ **Question :** K est-il le nombre maximal de clauses simultanément satisfiables ?

Annexe B

Représentation du préordre leximin par une fonction d'agrégation

Cette annexe est dédiée à la représentation du préordre leximin par une fonction d'agrégation, dans le cas où l'ensemble des vecteurs concernés par la fonction d'agrégation est fini. La première section concerne l'évaluation de la taille de l'espace image d'une telle fonction d'agrégation dans un cas particulier réaliste. La deuxième section présente les preuves relatives à la représentation du préordre leximin par des fonctions OWA et somme des puissances, présentées dans le chapitre 1. Enfin, nous abordons dans la troisième section le cas particulier de la famille de fonctions somme des puissances, pour laquelle nous cherchons à calculer l'exposant $p \leq 0$ maximum tel que cette fonction représente le préordre leximin.

B.1 Taille du domaine de la fonction d'agrégation

Considérons une fonction g qui représente le préordre leximin pour un ensemble de profils d'utilité $\mathscr{U}$ fini. Le nombre de classes d'équivalence pour le préordre leximin nous donnera le cardinal de l'ensemble $g(\mathscr{U})$, c'est-à-dire le nombre de valeurs différentes que prendra la fonction g sur l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{U}$, ou encore la taille de l'ensemble quotient de $\mathscr{U}$ pour la relation $\sim_{leximin}$.

Nous nous plaçons pour faire ce calcul dans un cas particulier, où nous définissons $\mathscr{U} = \mathscr{V}^n$, avec $\mathscr{V} = [\![1, m]\!]$. Nous avons donc un problème à m^n profils d'utilité possibles.

Proposition B.1 *Soit $g_{leximin} : [\![1, m]\!]^n \to \mathbb{N}$ une fonction représentant le préordre leximin sur $\mathscr{V}^n = [\![1, m]\!]^n$. Alors :*

$$|g_{leximin}([\![1, m]\!]^n)| = \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)!n!}$$

Afin de prouver cette relation, nous avons besoin d'un petit lemme technique :

Lemme 21

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2},\ \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)!} + \frac{(m + n - 2)!}{(m - 2)!} + \cdots + n! = \frac{(m + n)!}{(n + 1)(m - 1)!}. \tag{B.1}$$

Démonstration Ce lemme se prouve facilement par récurrence sur m.

▷ Pour $m = 1$, l'équation (B.1) se réduit à $n! = n!$, qui est trivialement vraie.

▷ Supposons que le lemme soit vrai pour tout n et un certain m. Alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{(m+n)!}{m!}+\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}+\cdots+n! &= \frac{(m+n)!}{m!}+\frac{(m+n)!}{(n+1)(m-1)!}\\ &= \frac{(m+n)!\times(n+1)+(m+n)!\times m}{(n+1)(m-1)!\times m}\\ &= \frac{(m+n+1)!}{m!(n+1)}\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie pour $m+1$, ce qui prouve le lemme par récurrence. ▲

Démonstration (Proposition B.1) Nous notons $u_{n,m} = |g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)|$. Nous pouvons remarquer que $u_{n,m}$ est exactement égal au nombre de vecteurs ordonnés de $[\![1,m]\!]^n$, et nous avons donc la relation de récurrence sur n suivante : $u_{n,m} = \sum_{k=1}^{m} u_{n-1,k}$. En effet, lorsque l'on ajoute une composante à un vecteur à $n-1$ composantes, il y a $u_{n-1,m}$ vecteurs ordonnés dont la première composante est 1, $u_{n-1,m-1}$ vecteurs ordonnés dont la première composante est 2, etc.

Nous allons prouver la proposition B.1 par récurrence sur n.

▷ Lorsque $n=1$, alors il y a m profils ordonnés différents, et $\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} = m$ pour $n=0$, ce qui prouve la proposition pour tout m à $n=1$.

▷ Supposons que pour un m fixé, on ait $u_{n,m} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$. Alors d'après la relation de récurrence, on a

$$\begin{aligned}u_{n+1,m} &= u_{n,m}+u_{n,m-1}+\cdots+u_{n,1}\\ &= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}+\frac{(m+n)!}{(m-2)!n!}+\cdots+1\\ &= \frac{1}{n!}\times\left(\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}+\frac{(m+n)!}{(m-2)!}+\cdots+n!\right)\\ &= \frac{(m+n)!}{(n+1)!(m-1)!} \quad \text{(d'après le lemme technique)}\end{aligned}$$

Cela prouve l'égalité pour $n+1$, donc la proposition B.1 par récurrence. ▲

Quel est le comportement de $|g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)|$ lorsque m tend vers $+\infty$?

Puisque $|g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)| = \dfrac{(m+n-1)\times\cdots\times m}{n!}$, nous avons :

$$\frac{m^n}{n!} \leq |g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)| \leq \frac{(m+n-1)^n}{n!}$$

Or, il existe un nombre m_0 tel que $\forall m \geq m_0$, $m \geq n-1$. Donc pour tout $m \geq m_0$, on a :

$$\theta_1 m^n = \frac{m^n}{n!} \leq |g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)| \leq \frac{2^n m^n}{n!} = \theta_2 m^n$$

D'où : $\boxed{|g_{leximin}([\![1,m]\!]^n)| = O_{m\to\infty}(m^n)}$

B.2 Représentation du préordre leximin

B.2.1 Par une moyenne pondérée ordonnée

Proposition B.2 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un OWA qui représente l'ordre leximin.*

Démonstration Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des utilités possibles. On note $m = \min\{|u - u'| \mid (u,u') \in \mathscr{U}^2,\ u \neq u'\}$ et $M = \max\{|u-u'| \mid (u,u') \in \mathscr{U}^2\}$ (ces nombres existent car $\mathscr{U}$ est fini). Puisque $\forall i,\ \frac{x^i-1}{x^{i+1}-x^i} \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, il est possible de trouver un $K \geq 1$ (assez grand) tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{K^i-1}{K^{i+1}-K^i} < \frac{m}{M}$. On notera g_{lex} l'OWA $g^{(K^n,\ldots,K,1)}$.

- ▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'utilités tels que $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$. Soit j tel que $\forall i < j,\ u_i^{\uparrow} = v_i^{\uparrow}$, et $u_j^{\uparrow} > v_j^{\uparrow}$. Alors $g_{lex}(\overrightarrow{u}) - g_{lex}(\overrightarrow{v}) = K^{n-j}(u_j^{\uparrow} - v_j^{\uparrow}) + \sum_{i=j+1} nK^{n-i}(u_i^{\uparrow} - v_i^{\uparrow})$. Par définition de m et M on a donc :
$$g_{lex}(\overrightarrow{u}) - g_{lex}(\overrightarrow{v}) > mK^{n-j} - M\sum_{i=0}^{j-1} K^{n-i} > mK^{n-j} - M\frac{K^{n-j}-1}{K-1}$$
$$> mK^{n-j} - M\frac{m}{M}K^j > 0$$
Donc si $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$ alors $g_{lex}(\overrightarrow{u}) > g_{lex}(\overrightarrow{v})$.
- ▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'utilités tels que $g_{lex}(\overrightarrow{u}) > g_{lex}(\overrightarrow{v})$. Supposons que $\overrightarrow{v} \succeq_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{v} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$ alors $g_{lex}(\overrightarrow{v}) > g_{lex}(\overrightarrow{u})$, et si $\overrightarrow{v} \sim_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}^{\uparrow} = \overrightarrow{u}^{\uparrow}$ donc $g_{lex}(\overrightarrow{u}) = g_{lex}(\overrightarrow{v})$ (par définition d'un OWA). Donc $\overrightarrow{v} \succeq_{\text{leximin}} \overrightarrow{u} \Rightarrow g_{lex}(\overrightarrow{v}) \geq g_{lex}(\overrightarrow{u})$, incompatible avec l'hypothèse de départ. On a donc si $g_{lex}(\overrightarrow{u}) > g_{lex}(\overrightarrow{v})$ alors $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$. ▲

B.2.2 Par une fonction somme des puissances

Proposition B.3 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un $p < 0$ tel que $g^{(p')}$ représente l'ordre leximin pour tout $p' \leq p$.*

Démonstration Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des utilités possibles. On note $m = \min\{|u - u'| \mid (u,u') \in \mathscr{U}^2,\ u \neq u'\}$ et $M = \max\{u \mid u \in \mathscr{U}\}$. Puisque $m/M > 0$, $(1+m/M)^p \xrightarrow[p\to-\infty]{} 0$, donc $\exists p_0 < 0$ tel que $\forall p \leq p_0$, $n(1+m/M)^p \leq 1$.

- ▷ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'utilités tels que $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$. Soit j tel que $\forall i < j,\ u_i^{\uparrow} = v_i^{\uparrow}$, et $u_j^{\uparrow} > v_j^{\uparrow}$. Alors $\forall p \leq p_0$, $g^{(p)}(\overrightarrow{u}) - g^{(p)}(\overrightarrow{v}) = \sum_{i=j} n({v_i^{\uparrow}}^p - {u_i^{\uparrow}}^p)$. Puisque $u_j^{\uparrow} > v_j^{\uparrow}$, nous avons $u_j^{\uparrow} \geq v_j^{\uparrow} + m$. De plus, $\forall i \geq j$, $u_i^{\uparrow} \geq u_j^{\uparrow}$, donc $u_i^{\uparrow} \geq v_j^{\uparrow} + m$, et donc ${u_i^{\uparrow}}^p \leq (v_j^{\uparrow} + m)^p$. D'où au final $\sum_{i=j}^n {u_i^{\uparrow}}^p \leq n(v_j^{\uparrow}+m)^p$. Puisqu'en outre $v_i \geq 0$ pour tout i, on a donc
$$\sum_{i=j} n({v_i^{\uparrow}}^p - {u_i^{\uparrow}}^p) \geq {v_j^{\uparrow}}^p - n(v_j^{\uparrow}+m)^p. \tag{B.2}$$
Or, $v_j^{\uparrow} \leq M$. Nous avons donc :
$$\frac{m}{v_j^{\uparrow}} \geq \frac{m}{M} \Rightarrow \left(1 + \frac{m}{v_j^{\uparrow}}\right)^p \leq \left(1+\frac{m}{M}\right)^p \Rightarrow n\left(1+\frac{m}{v_j^{\uparrow}}\right)^p \leq n\left(1+\frac{m}{M}\right)^p.$$

Or par définition de p, nous avons $n(1+m/M)^p \leq 1$. D'où $n\left(1+\frac{m}{v_j^{\uparrow}}\right)^p \leq 1$. Nous avons donc $n\left(v_j^{\uparrow}+m\right)^p \leq v_j^{\uparrow p}$, et donc $v_j^{\uparrow p} - n\left(v_j^{\uparrow}+m\right)^p \leq 0$. Cela nous donne au final, avec l'inéquation (B.2), $g^{(p)}(\overrightarrow{u}) - g^{(p)}(\overrightarrow{v}) \geq 0$.

▹ Soit p défini comme ci-dessus et soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'utilités tels que $g^{(p)}(\overrightarrow{u}) > g^{(p)}(\overrightarrow{v})$. Supposons que $\overrightarrow{v} \succeq_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{v} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$ alors $g^{(p)}(\overrightarrow{v}) > g^{(p)}(\overrightarrow{u})$, et si $\overrightarrow{v} \sim_{\text{leximin}} \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{v}^{\uparrow} = \overrightarrow{u}^{\uparrow}$ donc $g^{(p)}(\overrightarrow{u}) = g^{(p)}(\overrightarrow{v})$ (car $g^{(p)}$ est une fonction symétrique). Donc $\overrightarrow{v} \succeq_{\text{leximin}} \overrightarrow{u} \Rightarrow g^{(p)}(\overrightarrow{v}) \geq g^{(p)}(\overrightarrow{u})$, incompatible avec l'hypothèse de départ. On a donc si $g^{(p)}(\overrightarrow{u}) > g^{(p)}(\overrightarrow{v})$ alors $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$. ▲

B.3 Le cas particulier de la fonction somme des puissances

Comme nous l'avons vu précédemment, pour un ensemble fini $\mathscr{U}$ de vecteurs, il existe un $p_0 < 0$ tel que $g^{(p)}$ représente le préordre leximin sur $\mathscr{U}$ pour tout $p \leq p_0$. Nous allons chercher dans cette section à calculer le plus grand p_0 possible pour un $\mathscr{U}$ donné. Afin de clarifier les notations, nous allons noter $q = -p$, et $w^{(q)} = g^{(-p)}$, et nous chercherons donc le plus petit $q > 0$ tel que $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin pour un $\mathscr{U}$ donné. Nous supposerons pour simplifier que les vecteurs sont formés de composantes entières pouvant prendre leurs valeurs entre 0 et M.

B.3.1 Le cas critique

Nous avons la proposition suivante :

Proposition B.4 *La fonction $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin si et seulement si pour tout $x_0 \in [\![0, M]\!]$, $w^{(q)}(x_0, M, \ldots, M) < w^{(q)}(x_0+1, \ldots, x_0+1)$.*

La preuve de cette proposition est fondée sur un lemme un peu moins fort :

Lemme 22 *La fonction $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin si et seulement si pour tout $x_0 \in [\![0, M-1]\!]$, et pour tout $k < n$:*

$$w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \ldots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0+1, \ldots, x_0+1).$$

Démonstration L'un des sens de l'équivalence est immédiat. Si $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin, alors elle doit classer correctement les vecteurs $(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \ldots, M)$ et $(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k-1\text{fois}}, x_0+1, \ldots, x_0+1)$.

Supposons que pour tous $x_0 \in [\![0, M]\!]$ et $k < n$ on a $w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \ldots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0+1, \ldots, x_0+1)$. Alors on a $-(n-k)M^{-q} - x_0^{-q} < -(n-k+1)(x_0+1)^{-q}$. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs (que nous supposerons triés dans l'ordre croissant) tels que $\overrightarrow{u} \prec_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$. On note k l'entier tel que $\forall i < k$, $u_i = v_i$ et $u_k < v_k$. Nous avons $-(n-$

$k)M^{-q} - u_k^{-q} < -(n-k+1)(u_k+1)^{-q}$. Donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n-k)M^{-q} - u_k^{-q} < \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n-k+1)(u_k+1)^{-q} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n-k)M^{-q} - u_k^{-q} < \sum_{i=1}^{k-1} -v_i^{-q} - (n-k+1)(u_k+1)^{-q} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} -u_i^{-q} < \sum_{i=1}^{n} -v_i^{-q} \\
\Rightarrow \quad & w^{(q)}(\overrightarrow{u}) < w^{(q)}(\overrightarrow{v}).
\end{aligned}$$

▲

Démonstration (Proposition B.4) Nous avons :

$$\begin{aligned}
& w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \ldots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0+1, \ldots, x_0+1) \\
\Leftrightarrow \quad & -(n-k)M^{-q} - x_0^{-q} < -(n-k+1)(x_0+1)^{-q} \\
\Leftrightarrow \quad & (n-k)M^{-q} + x_0^{-q} - (n-k+1)(x_0+1)^{-q} > 0
\end{aligned}$$

Notons $h : (x, n, k, q, M) \mapsto (n-k)M^{-q} + x_0^{-q} - (n-k+1)(x_0+1)^{-q}$. h est dérivable par rapport à k, et on a $\dfrac{\partial h}{\partial k} = -M^{-q} + x_0^{-q}$. Donc pour tout $x_0 < M$, $\dfrac{\partial h}{\partial k} > 0$. Donc $h(x, n, k, q, M) > 0 \Leftrightarrow h(x, n, 1, q, M) > 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
& w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \ldots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0+1, \ldots, x_0+1) \\
& \qquad \Leftrightarrow w^{(q)}(x_0, M, \ldots, M) < w^{(q)}(x_0+1, \ldots, x_0+1).
\end{aligned}$$

▲

B.3.2 Calcul du q minimal

Nous devons trouver le q minimal q_{min} tel que $w^{(q)}(x_0, M, \ldots, M) < w^{(q)}(x_0+1, \ldots, x_0+1)$, c'est-à-dire tel que :

$$(n-1)M^{-q} + x_0^{-q} - n(x_0+1)^{-q} > 0. \tag{B.3}$$

Par la suite nous noterons f la fonction suivante :

$$f : x \mapsto (n-1)M^{-q} + x^{-q} - n(x+1)^{-q}.$$

B.3.2.1 Tableau de variation de f

Nous avons $f'(x) = nq(x+1)^{-(q+1)} - qx_0^{-(q+1)}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 & \Leftrightarrow n(x+1)^{-(q+1)} - x_0^{-(q+1)} > 0 \\
& \Leftrightarrow n > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{q+1} \\
& \Leftrightarrow \sqrt[q+1]{n} > 1 + \frac{1}{x} \\
& \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[q+1]{n} - 1}
\end{aligned}$$

La fonction f prend donc son minimum en $\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}$, et ce minimum vaut :

$$f(\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}) = (n-1)M^{-q} + (\sqrt[q+1]{n}-1)^q(1-n^{\frac{q}{q+1}}).$$

Le tableau de variations de la fonction f est donc le suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1})$	$\nearrow$	$(n-1)M^{-q}$

B.3.2.2 Une borne supérieure de q_{min}

Il semble très difficile de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dont la solution est nécessaire pour trouver le q minimal cherché (même Maple capitule). En revanche, une condition suffisante pour que f soit positive sur tout $[0, M-1]$ est (1) qu'elle soit décroissante sur tout cet intervalle, et (2) que $f(M-1) > 0$.

Pour que la condition (1) soit vraie, il suffit que $\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1} > M-1$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1} > M-1 &\Leftrightarrow \sqrt[q+1]{n}-1 < \frac{1}{M-1}\\ &\Leftrightarrow \sqrt[q+1]{n} < \frac{M}{M-1}\\ &\Leftrightarrow \frac{ln(n)}{q+1} < ln(\frac{M}{M-1})\\ &\Leftrightarrow q > \frac{ln(n)}{ln(\frac{M}{M-1})} - 1.\end{aligned}$$

Pour que la condition (2) soit vraie, il faut que :

$$\begin{aligned}f(M-1) > 0 &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (M-1)^{-q} - nM^{-q} > 0\\ &\Leftrightarrow (M-1)^{-q} - M^{-q} > 0\\ &\Leftrightarrow M > 0.\end{aligned}$$

Cette condition est toujours vraie. Nous avons donc une borne supérieure de q_{min} :

$$\boxed{q_{min} \leq \frac{ln(n)}{ln(\frac{M}{M-1})} - 1}$$

B.3.2.3 Une deuxième borne supérieure de q_{min}

Si q est tel que $f\left(\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}\right) > 0$, alors dans f est positive sur tout son domaine de définition. On a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}\right) > 0 &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}}-1)^q - n \cdot \left(\frac{n^{\frac{1}{q+1}}-1}{n^{\frac{1}{q+1}}}\right)^q > 0 \\
&\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}}-1)^q \times (1 - \frac{n}{n^{\frac{q}{q+1}}}) > 0 \\
&\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}}-1)^q \times (1 - n^{\frac{1}{q+1}}) > 0 \\
&\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} - (n^{\frac{1}{q+1}}-1)^{q+1} > 0
\end{aligned}$$

Cette dernière équation ne semble pas évidente à première vue à résoudre analytiquement. Un angle d'attaque serait peut-être de prouver l'implication suivante :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[q+1]{n}-1}\right) > 0 \Rightarrow \sqrt[q+1]{n} - 1 < \frac{1}{M-1}. \tag{B.4}$$

Dans ce cas, on aurait montré que la valeur minimale de f ne peut pas être positive si la valeur du x pour laquelle $f(x)$ est minimal est avant M. Dans ce cas, le q_{min} serait donc égal à la borne supérieure trouvée précédemment.

Annexe C

Calcul des indices d'inégalité généralisés

Nous détaillons dans cette annexe le calcul des indices d'inégalité généralisés aux droits inégaux. Nous emploierons, dans cette annexe, la notation simplificatrice suivante :

$$u' \stackrel{def}{=} \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{\overrightarrow{e}}}.$$

En conséquence, la notation $\overline{u'}$ désignera $\overline{u \triangleright \frac{div}{\overrightarrow{e}}}$, c'est-à-dire : $\overline{u'} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \dfrac{n}{m} \overline{u}$.

C.1 Indices d'Atkinson généralisés

C.1.1 $q \neq 0$

L'indice d'inégalité d'Atkinson classique correspondant à un entier $q \neq 0$ pour n agents s'écrit comme suit :

$$J_q(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{\overline{u}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{\overrightarrow{e}}}$:

$$J_{q,\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{u'_i}{\overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\frac{u_i}{e_i \overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} e_i^{1-q} \left(\frac{u_i}{\overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{J_{q,\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} e_i^{1-q} \left(\frac{u_i}{\overline{u}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}}$$

C.1.2 $q = 0$

L'indice d'inégalité d'Atkinson classique correspondant à 0 pour n agents s'écrit comme suit :

$$J_0(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\overline{u}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright^{div}_{\overrightarrow{e}}}$:

$$J_{0,\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{u'_i}{e_i\overline{u'}}\right)^{e_i}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{e_i\overline{u'}}\right)^{e_i}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{m}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{e_i\overline{u}}\right)^{e_i}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{D'où : } \boxed{J_{0,\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{m}{n}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{e_i\overline{u}}\right)\right)^{\overline{e_i}}}$$

C.2 Indice de Gini généralisé

C.2.1 Première formulation

La première formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\overrightarrow{u}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\overline{u} - L(\overrightarrow{u})_k)}{\displaystyle\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}u_i}.$$

Par simple substitution du profil d'utilités u par le profil $u' = \overrightarrow{u \triangleright^{div}_{\overrightarrow{e}}}$, on obtient l'expression suivante :

$$\boxed{G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(k\overline{u'} - L_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})_k)}{\displaystyle\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}u_i}}$$

C.2.2 Deuxième formulation

La deuxième formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{1}{n^2\overline{u}}\left(\sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1)u_k^{\uparrow}\right).$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright^{div}_{\overrightarrow{e}}}$:

$$G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{1}{m^2\overline{u'}}\left(\sum_{k=1}^{m}(2(m-k)+1)u_k'^{\uparrow}\right) = 1 - \frac{1}{nm\overline{u}}\left(\sum_{k=1}^{n}(2m+1)\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{m}2ku_k'^{\uparrow}}_{A}\right)$$

Si nous posons $E_k = \sum_{i=1}^{k} e_i^{\uparrow\frac{u}{e}}$ (avec $E_0 = 1$), nous avons : $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=E_{k-1}}^{E_k} 2i\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}}$.

En remarquant que $\sum_{i=k_1}^{k_2} i = \frac{(k_2+k_1)((k_2-k_1)+1)}{2}$, nous avons :

$$A = \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}} \frac{(E_k+E_{k-1})((E_k-E_{k-1})+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}} (2E_{k-1}+e_k^{\uparrow\frac{u}{e}})(e_k^{\uparrow\frac{u}{e}}+1).$$

En remplaçant A dans l'expression de $G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})$, nous obtenons donc :

$$\boxed{G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{1}{nm\overline{u}}\sum_{k=1}^{n}(2m+1-(2E_{k-1}+e_k^{\uparrow\frac{u}{e}})(e_k^{\uparrow\frac{u}{e}}+1))\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}}}$$

C.2.3 Troisième formulation

La troisième formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{2n^2\overline{u}}\sum_{1\leq i,j\leq n}|u_i-u_j|.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{\overrightarrow{e}}}$:

$$G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{2m^2\overline{u'}}\sum_{1\leq i,j\leq m}|u'_i-u'_j| = \frac{1}{2mn\overline{u}}\sum_{1\leq i,j\leq m}|u'_i-u'_j|$$

Les seules valeurs possibles pour $|u'_i-u'_j|$ sont les $|u_k/e_k-u_l/e_l|$, pour $1\leq k,l\leq n$. Pour $1\leq i,j\leq m$, u'_i et $u'j$ prennent e_k fois la valeur u_k/e_k, et e_l fois la valeur u_l/e_l. Donc $|u'_i-u'_j|$ prend e_ke_l fois la valeur $|u_k/e_k-u_l/e_l|$ et e_ke_l fois la valeur $|u_l/e_l-u_k/e_k|$.

$$\text{D'où : } \boxed{G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{2nm\overline{u}}\sum_{1\leq k,l\leq m} e_ke_l\left|\frac{u_k}{e_k}-\frac{u_l}{e_l}\right|}$$

Index