

Liste des figures et tableaux

Liste des figures

1	Acquisition d'une photographie par un satellite d'observation de la Terre.	8
2	Graphe de dépendances entre chapitres.	11
1.1	Représentation d'une relation binaire sous forme d'un graphe.	21
1.2	Représentation d'un ordre non complet sous forme d'un graphe : l'ordre représenté est la clôture transitive de $a \geq b \geq c, b \geq d \geq e, a \geq f \geq e$	22
1.3	Représentation d'un préordre non complet sous forme d'un graphe : l'ordre représenté est la clôture transitive de $\{a, b, c\} \geq d \geq \{e, f\}, d \geq \{g, h\} \geq i, \{a, b, c\} \geq \{j, k, l, m\} \geq i$	22
1.4	Illustration du principe de réduction des inégalités de Pigou-Dalton.	37
1.5	Illustration de la notion de dominance de Lorenz sur des profils d'utilité à deux composantes.	38
1.6	Indice de Gini : distance entre les courbes de Lorenz réelle et idéale.	40
1.7	La représentation graphique de quelques fonctions puissance.	45
1.8	Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille somme des puissances, pour 2 agents : $g^{(1)}, g^{(0)}, g^{(-1)}$ et $g^{(-10)}$	46
1.9	Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille OWA, pour 2 agents : $g^{(1,0)}, g^{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})}, g^{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})}$ et $g^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$	47
2.1	Illustration du principe de duplication des agents.	59
2.2	Illustration de la notion de dominance de Lorenz avec droits exogènes inégaux sur des profils d'utilité à deux composantes. Le vecteur de droits exogènes est $(3, 2)$	64
2.3	Deux exemples de distributions de probabilité (continues) de fonctions de densité f_X et f_Y . Y est obtenu à partir de X par un étalement à moyenne constante.	68
3.1	Un arbre de décision et le diagramme de décision binaire réduit associé pour la formule $(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}_1) \wedge (\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{y}_2)$	90
3.2	Le CP-net associé aux préférences de l'exemple 3.9.	101
3.3	Les préférences induites par le CP-net de la figure 3.2 associé aux préférences de l'exemple 3.9. La signification des arcs est la même que dans la figure 1.1 page 21 : «est préféré à».	102
3.4	Le GAI-net et son GAI-tree correspondant pour l'exemple 3.11.	107

4.1	Les différents problèmes de décision concernant l'absence d'envie, et leurs classes de complexité et relations d'inclusion.	157
4.2	Résumé des résultats de complexité obtenus pour le problème de maximisation de l'utilité collective.	167
5.1	Illustration simplifiée du principe de la programmation par contraintes.	176
5.2	L'arbre de recherche développé par l'algorithme 2 pour l'exemple 5.1.	187
5.3	Illustration de l'algorithme 2 sur un problème linéaire continu.	187
5.4	Le réseau de comparaisons correspondant à l'algorithme de tri utilisé de manière implicite dans l'algorithme 8 pour $n = 5$	194
6.1	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances du type Pléiades simplifié à 4 agents.	203
6.2	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances du type Pléiades simplifié à 10 agents.	205
6.3	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances du type Pléiades simplifié à 20 agents.	206
6.4	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances de type enchères combinatoires à 20 agents.	210
6.5	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances de type enchères combinatoires à 100 objets.	211
6.6	Courbes de Lorenz des solutions utilitariste classique et égalitariste leximin pour une instance du problème d'enchères combinatoires.	212
6.7	Comparaison des temps de calcul des algorithmes de résolution du problème [MAX-LEXIMINCSP] sur des instances de type problème logique générique, à 20 objets.	216
6.8	Problème de flot correspondant au problème d'affectation de sujets de TREX.	220
6.9	Résumé des contributions de la thèse.	225
A.1	Schéma récapitulatif des classes de complexité introduites. Si $P \neq NP$, les inclusions de classes sont strictes.	251

Liste des tableaux

1.1	Récapitulatif des propriétés des ordres collectifs et des partages	40
2.1	Rapprochement formel entre la décision en présence de risque et la décision collective.	67
2.2	Propriétés vérifiées par les fonctions d'utilité collective à droits exogènes inégaux.	70
3.1	Liste des langages de représentation de préférences introduits dans ce chapitre.	114
4.1	L'ensemble des problèmes de partage dont la complexité a été étudiée dans cette section. Le résumé de leurs classes de complexité est représenté dans la figure 4.1.	158

- 6.1 Temps de calcul (en ms) des algorithmes de résolution du problème [MAXLEXI-MINCSP] sur des instances de type problème logique Pléiades, à n agents et p objets. 215

Liste des symboles

A_i : État de la nature..... 66	$(*)$: N'importe quel opérateur fixé..... 162
\mathcal{A} : Ensemble des partages admissibles..... 19	\mathcal{E} : Espace d'alternatives..... 20
α : Coefficient d'avantage aux utilités les plus faibles (OWA)..... 46	$\varepsilon(\vec{u})$: Utilité également distribuée équivalente... 38
α_π^u : Poids d'un lot dans un langage k -additif... 104	$\varepsilon_{\vec{e}}$: Utilité également distribuée équivalente avec droits exogènes..... 65
$\mathbf{alloc}(\mathbf{o}, \mathbf{i})$: Variables binaires correspondant à l'espace des allocations..... 84	\vec{e} : Vecteur de droits exogènes normalisé..... 57
$Alloc_{\mathcal{O}, \mathcal{N}}$: Ensembles des variables binaires correspondant à l'espace des allocations..... 84	\vec{e} : Vecteur de droits exogènes..... 57
$\succeq_{best-out}^{GB_{\mathcal{O}}^{strat}}$: Structure de préférence induite par le langage logique best-out..... 95	e : Nombre de contraintes d'un réseau..... 86
$bc(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$: Clôture borne-cohérente du réseau de contraintes $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ 176	F : Application transformant un partage en interprétation logique..... 116
$bc(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, C)$: Clôture borne-cohérente pour C du réseau de contraintes $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ 176	F_X : Fonction cumulative de probabilité..... 66
C : Contrainte (d'un réseau de contraintes)..... 85	\succeq_{FOSD} : Dominance stochastique du premier ordre 67
Contrainte d'admissibilité..... 18	f_1, f_2, f_3 : Fonctions d'agrégation du langage logique pondéré..... 97
C_{excl} : Contrainte d'exclusion..... 19	$g_{\vec{e}}^{(w \triangleright)}$: Fonctions d'utilité collective OWA étendues 73
C_{glob_excl} : Contrainte d'exclusion globale..... 19	(f_1, \dots, f_n) : Ensemble des fonctions d'utilité.... 32
$C_{preempt}$: Contrainte de préemption..... 19	$G(\vec{u})$: Indice de Gini..... 39
\mathcal{C} : Ensemble de tables de préférence conditionnelle 100	G_X : Fonction décumulative de probabilité..... 66
\mathcal{C} : Ensemble des contraintes (d'un réseau de contraintes)..... 85	$G_{\vec{e}}$: Indice de Gini avec droits exogènes..... 65
Ensemble des contraintes d'admissibilité..... 19	$\mathcal{GB}_{\mathcal{O}}$: Ensemble des bases de buts sur \mathcal{O} 95
\mathcal{C} : Classe de problèmes..... 140	$\mathcal{GB}_{\mathcal{O}}^{strat}$: Ensemble des bases de buts stratifiées sur \mathcal{O} 95
$\succeq_{CP-net}^{(G, \mathcal{C})}$: Structure de préférence induite par un CP-net..... 102	$\mathcal{GB}_{\mathcal{O}}^{weighted}$: Ensemble des bases de buts pondérées sur \mathcal{O} 97
$u_{Card}^{GB_{\mathcal{O}}}$: Fonction d'utilité induite par le langage logique Card..... 96	Γ : Ensemble de contraintes..... 188
$u_d^{GB_{\mathcal{O}}}$: Fonction d'utilité induite par le langage logique à base de distance..... 97	$\Gamma_{\mathcal{P}}$: Contrainte de préemption logique..... 116
$D = \langle \beta, \Delta \rangle$: Théorie des défauts supernormale. 119	$GB_{\mathcal{O}}$: Base de buts sur \mathcal{O} 95
Δ_i : Ensemble des demandes pondérées de l'agent i 122	$GB_{\mathcal{O}}^{strat}$: Base de buts stratifiée sur \mathcal{O} 95
\mathcal{D} : Fonction de domaines..... 83	$GB_{\mathcal{O}}^{weighted}$: Base de buts pondérée sur \mathcal{O} 97
δ : Demande pondérée..... 122	$\gamma(\pi)$: Interprétation de $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ correspondant au sous-ensemble π 92
\div : Fonction de répartition..... 58	\mathcal{G} : Ensemble des bonnes alternatives d'une structure de préférence dichotomique..... 23
\mathcal{D}_x : Domaine d'une variable..... 83	g : Fonction d'agrégation collective..... 123
$\succeq_{discrimin}^{GB_{\mathcal{O}}^{strat}}$: Structure de préférence induite par le langage logique discrimin..... 95	$g^{(K,S)}$: Fonction d'utilité collective de Kalai-Smorodinsky..... 48
d : Pseudo-distance..... 97	$g^{(N)}$: Fonction d'utilité collective de Nash..... 43
Taille du plus grand domaine des variables.. 176	$g^{(e)}$: Fonction d'utilité collective égalitariste.... 41
Taille maximale des contraintes d'un réseau.. 86	$g^{(p)}$: Fonctions d'utilité collective somme des puissances..... 43
$disp$: Coefficient d'utilisation de l'information (OWA) 46	$g_{\vec{e}, div}^{(p)}$: Fonction d'utilité collective somme des puissances avec division..... 71
	$g_{\vec{e}, rep}^{(p)}$: Fonction d'utilité collective somme des puissances avec réplification..... 71
	g^* : Fonction d'utilité collective utilitariste classique 41
	$g^{\vec{w}}$: Fonctions d'utilité collective OWA..... 46

$g_{\vec{e}}$: Fonction d'utilité collective à droits inégaux .58	$maxleximin(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \vec{\mathbf{u}})$: Ensemble des solutions leximin-optimales d'un réseau de contraintes 172
g_{agg} : Opérateur d'agrégation 32	$(\mathcal{N}, \mathcal{O}, (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \mathcal{C}, \langle \mathcal{V}_{ind}, \succeq_{ind}, \oplus \rangle, \langle \mathcal{V}, \succeq \rangle, g)$: Instance du problème de partage de biens indivisibles générique. 124
$gac(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$: Clôture arc-cohérente généralisée du réseau de contraintes $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ 176	$(\mathcal{N}, \mathcal{O}, (\varphi_1, \dots, \varphi_n))$: Instance du problème d'allocation avec préférences dichotomiques . . 116
$gac(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, C)$: Clôture arc-cohérente généralisée pour C du réseau de contraintes $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ 175	\mathcal{N} : Ensemble d'agents 16
h : Bijection d'allocation 84	ν : Fonction de volume (d'une contrainte de volume 19
$\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$: Sémantique d'un langage de représentation de préférences 91	n : Nombre d'agents 16
\mathcal{I} : Espace d'issues 66	$nonsat(\pi, GB_{\mathcal{O}})$: Ensemble des buts non satisfaits par π 95
$J(\vec{u})$: Indice d'inégalité 38	(o_k, w_k) : Demande atomique d'un agent 149
$J_q(\vec{u})$: Indice d'Atkinson 39	Ω : Espace d'états de la nature 66
$J_{\vec{e}}$: Indice d'inégalité avec droits exogènes 65	\mathcal{O} : Ensemble d'objets 92
$J_{q, \vec{e}}$: Indices d'Atkinson avec droits exogènes . . . 65	\mathbf{o} : Variable objectif d'un réseau de contraintes . 172
\mathcal{L} : Ensemble des loteries 66	$\vec{\mathbf{o}}$: Vecteur objectif d'un réseau de contraintes . 172
\mathcal{L}_{Card} : Langage de représentation logique Card. . 96	$Pa(\mathbf{x})$: Parents d'une variable dans un CP-net 100
\mathcal{L}_{GWL} : Langage <i>Generalized Weighted Logic</i> . . 112	$\Phi_{\mathcal{P}}$: $\{\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*\}$ 118
\mathcal{L}_{OR} : Langage OR 110	\oplus : Fonction d'agrégation individuelle 122
\mathcal{L}_{OOX} : Langage OR-of-XOR 111	$\succeq_{Pareto}^{GB_{\mathcal{O}}}$: Structure de préférence induite par le langage logique de Pareto 95
\mathcal{L}_{Pareto} : Langage de représentation logique de Pareto 95	\triangleright : Relation de préférence sur des formules (<i>ceteris paribus</i>) 99
\mathcal{L}_{XOR} : Langage XOR 110	$\varphi(\delta)$: Formule d'une demande pondérée 122
$\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$: Syntaxe d'un langage de représentation de préférences 91	φ_i^* : Préférence dichotomique transformée 116
\mathcal{L}_{Var} : Langage logique fondé sur les variables de Var 86	$\vec{\pi}$: Partage 16
\mathcal{L}_{Var}^+ : Formules positives de \mathcal{L}_{Var} 87	p : Nombre d'objets 120
$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$: Langage logique fondé sur l'ensemble \mathcal{O} 93	p_i : Probabilité élémentaire 66
$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^+$: Formules positives de $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ 93	val : Valuation dans un réseau de contraintes valué 108
$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}^{alloc}$: Langage propositionnel associé à l'espace des allocations 88	q : Seuil d'indifférence 25
$\mathcal{L}_{at.bids}$: Langage des mises atomiques 109	\mathcal{R}_{Card} : Langage de représentation logique Card. . 96
$\mathcal{L}_{dicho}(\mathcal{O})$: Langage de représentation logique d'une structure dichotomique 94	\mathcal{R}_{OR} : Langage OR 110
\mathcal{L}_d : Langage de représentation logique à base de distance 97	\mathcal{R}_{OOX} : Langage OR-of-XOR 111
$\mathcal{L}_{weighted}$: Langage de représentation logique pondéré 97	\mathcal{R}_{Pareto} : Langage de représentation logique de Pareto 95
$\Lambda_{\mathcal{P}}$: Expression logique de l'absence d'envie . . 117	\mathcal{R}_{XOR} : Langage XOR 110
λ : Contexte logique d'une préférence 99	$\mathcal{R}_{best-out}$: Langage de représentation logique best-out 95
$\succeq_{leximin}$: Préordre leximin 42	$\mathcal{R}_{dicho}(\mathcal{O})$: Langage de représentation logique d'une structure dichotomique 94
$\succeq_{leximin}^{GB_{\mathcal{O}}^{strat}}$: Structure de préférence induite par le langage logique leximin 95	$\mathcal{R}_{discrimin}$: Langage de représentation logique discrimin. 95
$\overrightarrow{L(\vec{u})}$: Courbe de Lorenz 37	\mathcal{R}_d : Langage de représentation logique à base de distance 97
$\overrightarrow{L_{\vec{e}}(\vec{u})}$: Courbe de Lorenz avec droits inégaux . 64	$\mathcal{R}_{leximin}$: Langage de représentation logique leximin. 95
$\langle \mathcal{V}, \succeq, \oplus \rangle$: Monoïde commutatif associé à une structure de valuation cardinale 24	$\mathcal{R}_{weighed}$: Langage de représentation logique pondéré. 97
$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$: Multiensembles 182	\mathcal{R} : Langage de représentation de préférences . . . 91
μ : Mesure de crédibilité 25	\mathfrak{R} : Relation binaire 20
Mesure de volume (d'une contrainte de volume) 19	\mathfrak{R}_I : Relation d'indifférence associée à une structure de préférences ordinale 22
\mathbf{m}, \mathbf{M} : Minimum et maximum de deux composantes du vecteur objectif 191	
\hat{m} : Valeur du maximin 183	
$max(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathbf{o})$: Ensemble des solutions optimales d'un réseau de contraintes 172	

\mathfrak{R}_P : Relation de préférence stricte associée à une structure de préférences ordinale 22

\mathfrak{R}_R : Relation d'incomparabilité associée à une structure de préférences ordinale 22

\mathfrak{R}_S : Relation binaire d'une structure de préférences ordinale 22

\mathcal{R} : Ressource 16

$\mathcal{R}(C)$: Instanciations autorisées par une contrainte 85

r : Arité maximale des contraintes d'un réseau ... 86

r_i : Utilité d'un clone 58

$\langle \mathcal{V}, \succeq \rangle$: Structure de valuation 23

σ : Permutation 33

$\sigma(\delta, \pi)$: Valeur de satisfaction d'une demande δ vis-à-vis de π 122

$sol(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$: Solution d'un réseau de contraintes 85

\mathcal{S}_{sat} : Sous-ensemble saturé de variables objectif 183

\succeq_{SOSD} : Dominance stochastique du second ordre 67

$sat(\pi, GB_{\mathcal{C}})$: Ensemble des buts satisfaits par π . 95

(u_1, \dots, u_n) : Profil d'utilité 32

$\vec{u}_{\triangleright_{\mathcal{C}}}$: Profil d'utilité obtenu par duplication des agents 58

\hat{u}_i : Utilité maximale si seul d'un agent 34

$u_{OR}^{\mathcal{M}_{OR}}$: Fonction d'utilité induite par le langage OR 110

$u_{OoX}^{\mathcal{M}_{OoX}}$: Fonction d'utilité induite par le langage OR-of-XOR 111

$u_{XOR}^{\mathcal{M}_{XOR}}$: Fonction d'utilité induite par le langage XOR 110

u : Fonction d'utilité 24

$V(\Delta)$: Ensemble des symboles propositionnels apparaissant dans Δ 128

V_{max} : Volume maximum autorisé (pour une contrainte de volume 19

Var : Ensembles de variables propositionnelles ... 86

$Var(\varphi)$: Ensembles des variables propositionnelles apparaissant dans φ 87

$\langle \mathcal{V}_{ind}, \succeq_{ind}, \oplus \rangle$: Espace de valuation individuel . 122

$\succ_v^{x_i}$: Préférence associée à une instanciation dans un CP-net 100

φ : Fonction de valuation dans un réseau de contraintes valué 107

\hat{v} : Instanciation optimale 181

v : Instanciation 83

w_{\triangleright} : Vecteur de poids étendu 73

\vec{w} : Vecteur de poids (OWA) 46

$u_{weighted}^{GB_{\mathcal{C}}}$: Fonction d'utilité induite par le langage logique pondéré. 97

$w(\delta)$: Poids d'une demande pondérée 122

X : Variable aléatoire discrète 66

\mathcal{X} : Ensemble de variables 83

$\mathcal{X}(C)$: Scope d'une contrainte 85

Annexe A

Complexité computationnelle : liste des classes et problèmes

Ce chapitre d'annexe a pour vocation de présenter les classes de complexité utilisées tout au long du document. Nous présentons aussi les problèmes canoniques associés à chaque classe de complexité, ainsi que la liste des problèmes de décision utilisés dans les démonstrations, associés à leur classe de complexité. Nous supposons que le lecteur est familier avec les notions fondamentales de théorie de la complexité : problèmes de décision, langage, machine de Turing, réduction polynomiale. Pour plus d'informations, on pourra se reporter à des ouvrages de référence tels que [Papadimitriou, 1994; Garey et Johnson, 1979].

Pour tout problème de décision \mathcal{P} , nous notons $L_{\mathcal{P}}$ un langage «raisonnable» associé à \mathcal{P} , et $\text{co-}\mathcal{P}$ le problème complémentaire de \mathcal{P} . De même, pour une machine de Turing \mathcal{M} , on désigne par $L_{\mathcal{M}}$ le langage accepté par \mathcal{M} .

A.1 Classes de complexité

Définition A.1 (Classe P) *La classe P est formée de l'ensemble des problèmes \mathcal{P} tels qu'il existe une machine de Turing déterministe \mathcal{M}_D s'exécutant en temps polynômial telle que $L_{\mathcal{M}_D} = L_{\mathcal{P}}$.*

Définition A.2 (Classe NP) *La classe NP est formée de l'ensemble des problèmes \mathcal{P} tels qu'il existe une machine de Turing non-déterministe \mathcal{M}_{ND} s'exécutant en temps polynômial que $L_{\mathcal{M}_{ND}} = L_{\mathcal{P}}$.*

Le problème NP-complet canonique est le problème [SAT] :

Problème 19: [SAT] [Cook, 1971]

INSTANCE : Une formule booléenne φ en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.

QUESTION : φ est-elle satisfiable ?

Définition A.3 (Classe DP) *Un problème \mathcal{P} est dans la classe DP si et seulement si il existe un couple de problèmes $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ tels que :*

- ▷ $L_{\mathcal{P}} = L_{\mathcal{P}_1} \cap L_{\mathcal{P}_2}$,
- ▷ $\mathcal{P}_1 \in \text{NP}$,
- ▷ $\mathcal{P}_2 \in \text{co-NP}$

Remarquons que cette classe n'est *a priori* pas égale à $P \cap NP$, à moins que $P = NP$. Le problème DP canonique est le problème [SAT-UNSAT]

Problème 20: [SAT-UNSAT]

INSTANCE : Un couple de formules booléennes (φ, φ') en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
 QUESTION : Est-il vrai que φ est satisfiable et φ' insatisfiable ?

Les classes de complexité suivantes requièrent la définition de la notion de machine de Turing à oracle :

Définition A.4 (Machine de Turing à oracle) *Étant donné un problème \mathcal{P} , une machine de Turing à oracle \mathcal{P} est une machine de Turing multibande $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}$, qui possède un état particulier $q_{\mathcal{P}}$ et une bande particulière appelée bande de requête. Lorsqu'elle se trouve dans l'état $q_{\mathcal{P}}$, la machine de Turing passe en un temps unitaire dans un état q_{yes} ou dans un état q_{no} , selon que la chaîne contenue sur la bande de requête appartient à $L_{\mathcal{P}}$ ou pas.*

En d'autres termes, le fonctionnement d'une machine de Turing à oracle est identique à celui d'une machine de Turing normale, excepté le fait qu'elle a la capacité de deviner en un pas de temps la réponse à un problème donné (en faisant appel à un oracle). Pour toute classe de complexité temporelle déterministe ou non-déterministe \mathbf{C} , la classe $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$ désigne l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing du même type et avec la même borne temporelle que pour \mathbf{C} , mais avec un oracle de type \mathcal{P} .

Si \mathbf{C} est une classe déterministe ou non-déterministe de complexité temporelle polynomiale (telle que P ou NP), $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$ est équivalente à n'importe quelle classe $\mathbf{C}^{\mathcal{P}'}$, pour peu que \mathcal{P} puisse se réduire à \mathcal{P}' en temps polynomial et vice-versa. Ainsi, étant donnée une classe de complexité \mathbf{C}' , nous notons $\mathbf{C}^{\mathbf{C}'}$ les classes de type $\mathbf{C}^{\mathcal{P}}$, avec $\mathcal{P} \in \mathbf{C}'$.

Définition A.5 (Hiérarchie polynomiale) *La hiérarchie polynomiale cumulative est l'ensemble des classes de complexité $\mathbf{PH} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\Delta_i, \Sigma_i, \Pi_i\}$ défini récursivement par :*

- ▷ $\Delta_0^p = \Sigma_0^p = \Pi_0^p = P$
- ▷ $\forall i \geq 0 :$
 - $\Delta_{i+1}^p = P^{\Sigma_i^p}$,
 - $\Sigma_{i+1}^p = NP^{\Sigma_i^p}$,
 - $\Pi_{i+1}^p = co-NP^{\Sigma_i^p}$.

Les problèmes canoniques des classes de la hiérarchie polynomiale s'expriment sous la forme de logique propositionnelle «quantifiée» (à chaque classe de la hiérarchie correspond une séquence précise de quantificateurs) :

Problème 21: [QSAT_i]

INSTANCE : Un ensemble de variables booléennes partitionnés en i sous-ensembles $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i$, et une formule propositionnelle $\varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$.
 QUESTION : Existe-t-il une interprétation des variables de \mathcal{X}_1 telle que pour toute interprétation des variables de \mathcal{X}_2 il existe une interprétation des variables de \mathcal{X}_3 , et *caetera* jusqu'à \mathcal{X}_i , telle que $\varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$ est satisfaite ? En d'autres termes, et par abus de notation, $\exists \mathcal{X}_1 \forall \mathcal{X}_2 \exists \mathcal{X}_3 \dots Q \mathcal{X}_i \varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$ (avec Q désignant \exists si i est pair et \forall si i est impair) est-elle satisfiable ?

Parmi les classes de la hiérarchie polynomiale, les classes du deuxième niveau, Δ_2^p , Σ_2^p et Π_2^p , correspondant respectivement aux classes P^{NP} , NP^{NP} et $co-NP^{NP}$ sont de première importance, car

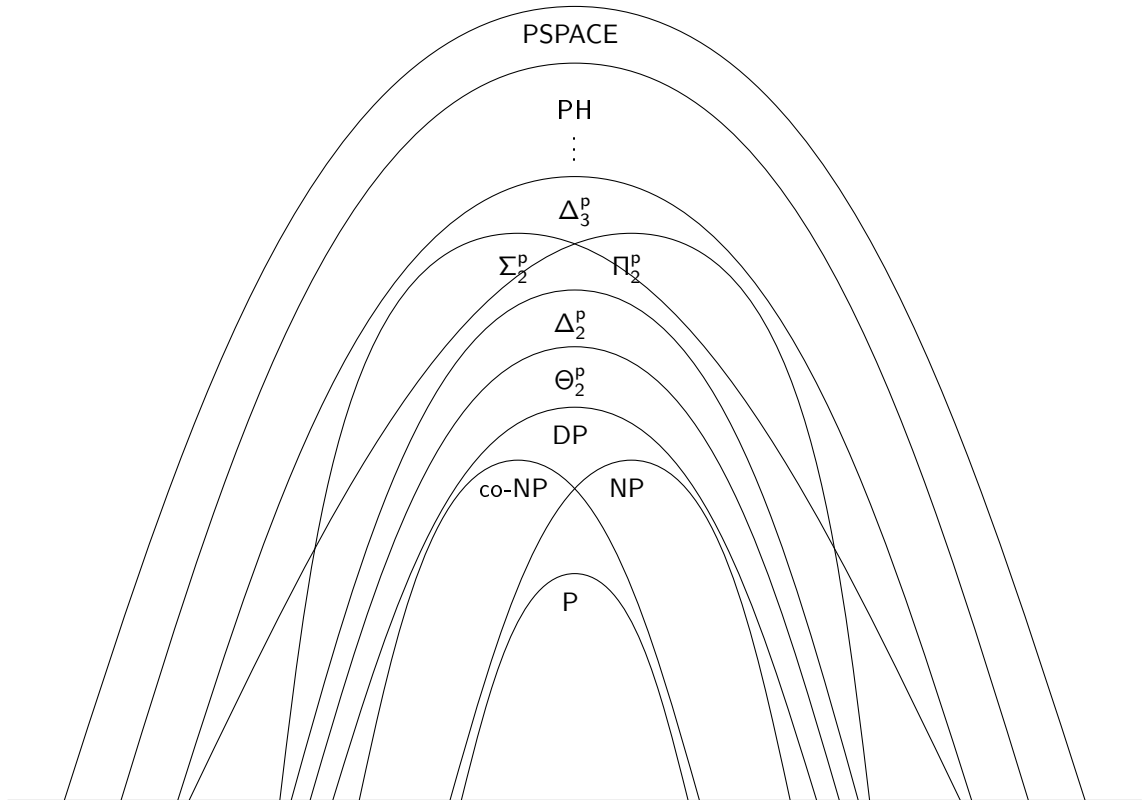


Figure A.1 — Schéma récapitulatif des classes de complexité introduites. Si $P \neq NP$, les inclusions de classes sont strictes.

elles correspondent à un ensemble de problèmes issus de l'étude du raisonnement en logique, donc historiquement liés à l'Intelligence Artificielle : raisonnement non-monotone, abduction...

Nous définissons enfin une sous-classe de Δ_2^P , qui correspond aux problèmes dont la résolution nécessite des oracles NP , mais dont le nombre est une fonction logarithmique de la taille des données d'entrée.

Définition A.6 (Classe Θ_2^P) La classe Θ_2^P est formée de l'ensemble des problèmes décidés par une machine de Turing déterministe M^{NP} à oracle de type NP qui s'exécute en temps polynômial, et ne nécessitant qu'un nombre d'appels de l'ordre de $O(\log n)$ à l'oracle NP .

Intuitivement, cette classe correspond aux problèmes impliquant des données numériques, et donc qui peuvent être traités par une recherche dichotomique. Nous pouvons citer comme représentant de cette classe une version du problème [UNWEIGHTED-MAX-SAT] :

Problème 22: [UNWEIGHTED-MAX-SAT]

INSTANCE : Un ensemble \mathcal{C} de clauses et un entier K .

QUESTION : K est-il le nombre maximal de clauses simultanément satisfiables ?

Un résumé de l'ensemble des classes introduites est présenté sur la figure A.1.

A.2 Liste des problèmes introduits

Problème 1 (page 109) : Winner Determination Problem

- ▷ **Instance** : Un ensemble d'agents \mathcal{N} , un ensemble d'objets \mathcal{O} , un ensemble de fonctions d'utilité (f_1, \dots, f_n) exprimées sous forme de mises dans un langage d'enchères combinatoires, et un entier K .
- ▷ **Question** : Existe-t-il un partage $\vec{\pi}$ des objets qui satisfait la contrainte de préemption et tel que $\sum_{i=1}^n f_i(\pi_i) \geq K$?

Problème 2 (page 130) : [RSI] (Restricted Skeptical Inference)

- ▷ **Instance** : Un ensemble de formules propositionnelles $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.
- ▷ **Question** : Tous les ensembles maximaux-consistants de Δ contiennent-ils α_1 ?

Problème 3 (page 134) : [SET SPLITTING]

- ▷ **Instance** : Une collection $C = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini \mathcal{S} .
- ▷ **Question** : Existe-t-il une partition $\langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \rangle$ de \mathcal{S} telle qu'aucun des sous-ensembles de C n'est entièrement contenu ni dans \mathcal{S}_1 ni dans \mathcal{S}_2 ?

Problème 4 (page 140) : [EXACT COVER BY 3-SETS] [Karp, 1972]

- ▷ **Instance** : Un ensemble \mathcal{S} de taille $3q$, et une collection $C = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{|C|}\}$ de sous-ensembles à 3 éléments de \mathcal{S} .
- ▷ **Question** : C contient-il une couverture exacte pour \mathcal{S} , c'est-à-dire une sous-collection $C' \subseteq C$ telle que chaque élément de \mathcal{S} apparaît dans exactement un membre de C' ?

Problème 5 (page 144) : [MAX-INDEX-SAT]_{odd} [Wagner, 1990]

- ▷ **Instance** : Une suite de formules propositionnelles (χ_1, \dots, χ_n) telle que $(\chi_i \text{ est satisfiable}) \Rightarrow (\chi_{i+1} \text{ est insatisfiable})$.
- ▷ **Question** : L'index maximum i tel que χ_i est satisfiable est-il un nombre impair ?

Problème 6 (page 149) : [MAX-SAT-ASG]_{even} [Wagner, 1987]

- ▷ **Instance** : Une formule propositionnelle χ en forme normale conjonctive, sur un ensemble de variables propositionnelles $V = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, et une fonction poids w sur les interprétations $v : Var \rightarrow \{0, 1\}$, définie par $w(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i v(\mathbf{x}_i) \times 2^{i-1}$.
- ▷ **Question** : Est-ce que $\max_{M \text{ modèle de } \chi} w(M)$ est un nombre pair (en d'autres termes la variable \mathbf{x}_1 est-elle falsifiée dans le modèle de poids maximal) ?

Problème 7 (page 152) : [PARTITION]

- ▷ **Instance** : Un ensemble fini \mathcal{S} et une taille $s(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in \mathcal{S}$.
- ▷ **Question** : Existe-t-il un sous-ensemble $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathcal{S}'} s(a) = \sum_{a \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'} s(a)$?

Problème 8 (page 156) : [MAX-CUF]

- ▷ **Instance** : Une instance $(\mathcal{N}, \mathcal{O}, (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \mathcal{C}, \langle \mathcal{V}_{ind}, \geq_{ind}, \oplus \rangle, \langle \mathcal{V}, \geq, \rangle, g)$ du problème de partage de biens indivisibles et un élément $K \in \mathcal{V}$.
- ▷ **Question** : Existe-t-il une allocation admissible $\vec{\pi}$ telle que $u_c(\vec{\pi}) \geq K$?

Problème 9 (page 160) : [INDEPENDENT SET]

- ▷ **Instance** : Un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ et un entier K .
- ▷ **Question** : Existe-t-il un sous-ensemble $\mathcal{S} \subseteq V$ de taille au moins K tel que pour tout couple (v, v') d'éléments de \mathcal{S} , $(v, v') \notin E$ (autrement dit, v et v' ne sont pas connectés dans \mathcal{G}) ?

Problème 10 (page 161) : [SET PACKING]

- ▷ **Instance** : Une collection C d'ensembles finis, et un entier K .
- ▷ **Question** : Existe-t-il une sous-collection $C' \subseteq C$ d'ensembles disjoints tels que $|C'| \geq K$?

Problème 11 (page 163) : [MAXIMAL MATCHING]

- ▷ **Instance** : Un graphe bipartite pondéré $\mathcal{G}(V = N_1 \cup N_2, E)$, avec $w(v, v')$ désignant le poids d'une arête $\{v, v'\}$, et un entier K .
- ▷ **Question** : Existe-t-il un couplage de poids supérieur ou égal à K , c'est-à-dire un sous-ensemble $E' \subseteq E$ tel que $\sum_{\{v, v'\} \in E'} w(v, v') \geq K$, et $\forall v \in V, \nexists (v', v'') \in V^2$ tel que $\{v, v'\} \in E'$ et $\{v, v''\} \in E'$?

Problème 12 (page 164) : [KNAPSACK]

- ▷ **Instance** : Un ensemble fini \mathcal{S} une fonction de valeur $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$, une fonction de volume $v : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$, une capacité maximale v_{max} et un entier K .
- ▷ **Question** : Existe-t-il un sous-ensemble $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathcal{S}'} v(a) \leq v_{max}$ et $\sum_{a \in \mathcal{S}'} u(a) \geq K$?

Problème 13 (page 164) : [HITTING SET]

- ▷ **Instance** : Une collection C de sous-ensembles $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$ d'un ensemble \mathcal{S} et un entier $K \leq |\mathcal{S}|$.
- ▷ **Question** : Existe-t-il un sous-ensemble $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, avec $|\mathcal{S}'| \leq K$, tel que $\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}_i \neq \emptyset$ pour tout $\mathcal{S}_i \in C$?

Problème 14 (page 173) : [CSP]

- ▷ **Instance** : Un réseau de contraintes $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$.
- ▷ **Question** : $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ a-t-il une solution (une instantiation complète cohérente) ?

Problème 19 (page 249) : [SAT] [Cook, 1971]

- ▷ **Instance** : Une formule booléenne φ en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
- ▷ **Question** : φ est-elle satisfiable ?

Problème 20 (page 250) : [SAT-UNSAT]

- ▷ **Instance** : Un couple de formules booléennes (φ, φ') en forme normale conjonctive avec 3 littéraux par clause.
- ▷ **Question** : Est-il vrai que φ est satisfiable et φ' insatisfiable ?

Problème 21 (page 250) : [QSAT_i]

- ▷ **Instance** : Un ensemble de variables booléennes partitionnés en i sous-ensembles $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i$, et une formule propositionnelle $\varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$.
- ▷ **Question** : Existe-t-il une interprétation des variables de \mathcal{X}_1 telle que pour toute interprétation des variables de \mathcal{X}_2 il existe une interprétation des variables de \mathcal{X}_3 , et *caetera* jusqu'à \mathcal{X}_i , telle que $\varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$ est satisfaite ? En d'autres termes, et par abus de notation, $\exists \mathcal{X}_1 \forall \mathcal{X}_2 \exists \mathcal{X}_3 \dots Q \mathcal{X}_i \varphi(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_i)$ (avec Q désignant \exists si i est pair et \forall si i est impair) est-elle satisfiable ?

Problème 22 (page 251) : [UNWEIGHTED-MAX-SAT]

- ▷ **Instance** : Un ensemble \mathcal{C} de clauses et un entier K .
- ▷ **Question** : K est-il le nombre maximal de clauses simultanément satisfiables ?

Annexe B

Représentation du préordre leximin par une fonction d'agrégation

Cette annexe est dédiée à la représentation du préordre leximin par une fonction d'agrégation, dans le cas où l'ensemble des vecteurs concernés par la fonction d'agrégation est fini. La première section concerne l'évaluation de la taille de l'espace image d'une telle fonction d'agrégation dans un cas particulier réaliste. La deuxième section présente les preuves relatives à la représentation du préordre leximin par des fonctions OWA et somme des puissances, présentées dans le chapitre 1. Enfin, nous abordons dans la troisième section le cas particulier de la famille de fonctions somme des puissances, pour laquelle nous cherchons à calculer l'exposant $p \leq 0$ maximum tel que cette fonction représente le préordre leximin.

B.1 Taille du domaine de la fonction d'agrégation

Considérons une fonction g qui représente le préordre leximin pour un ensemble de profils d'utilité \mathcal{U} fini. Le nombre de classes d'équivalence pour le préordre leximin nous donnera le cardinal de l'ensemble $g(\mathcal{U})$, c'est-à-dire le nombre de valeurs différentes que prendra la fonction g sur l'ensemble des vecteurs de \mathcal{U} , ou encore la taille de l'ensemble quotient de \mathcal{U} pour la relation $\sim_{leximin}$.

Nous nous plaçons pour faire ce calcul dans un cas particulier, où nous définissons $\mathcal{U} = \mathcal{V}^n$, avec $\mathcal{V} = \llbracket 1, m \rrbracket$. Nous avons donc un problème à m^n profils d'utilité possibles.

Proposition B.1 *Soit $g_{leximin} : \llbracket 1, m \rrbracket^n \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction représentant le préordre leximin sur $\mathcal{V}^n = \llbracket 1, m \rrbracket^n$. Alors :*

$$|g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)| = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$$

Afin de prouver cette relation, nous avons besoin d'un petit lemme technique :

Lemme 21

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}, \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} + \frac{(m+n-2)!}{(m-2)!} + \dots + n! = \frac{(m+n)!}{(n+1)(m-1)!}. \quad (\text{B.1})$$

Démonstration Ce lemme se prouve facilement par récurrence sur m .

▷ Pour $m = 1$, l'équation (B.1) se réduit à $n! = n!$, qui est trivialement vraie.

▷ Supposons que le lemme soit vrai pour tout n et un certain m . Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{(m+n)!}{m!} + \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} + \dots + n! &= \frac{(m+n)!}{m!} + \frac{(m+n)!}{(n+1)(m-1)!} \\ &= \frac{(m+n)! \times (n+1) + (m+n)! \times m}{(n+1)(m-1)! \times m} \\ &= \frac{(m+n+1)!}{m!(n+1)} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie pour $m+1$, ce qui prouve le lemme par récurrence. ▲

Démonstration (Proposition B.1) Nous notons $u_{n,m} = |g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)|$. Nous pouvons remarquer que $u_{n,m}$ est exactement égal au nombre de vecteurs ordonnés de $\llbracket 1, m \rrbracket^n$, et nous avons donc la relation de récurrence sur n suivante : $u_{n,m} = \sum_{k=1}^m u_{n-1,k}$. En effet, lorsque l'on ajoute une composante à un vecteur à $n-1$ composantes, il y a $u_{n-1,m}$ vecteurs ordonnés dont la première composante est 1, $u_{n-1,m-1}$ vecteurs ordonnés dont la première composante est 2, etc.

Nous allons prouver la proposition B.1 par récurrence sur n .

- ▷ Lorsque $n=1$, alors il y a m profils ordonnés différents, et $\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} = m$ pour $n=0$, ce qui prouve la proposition pour tout m à $n=1$.
- ▷ Supposons que pour un m fixé, on ait $u_{n,m} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$. Alors d'après la relation de récurrence, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1,m} &= u_{n,m} + u_{n,m-1} + \dots + u_{n,1} \\ &= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} + \frac{(m+n)!}{(m-2)!n!} + \dots + 1 \\ &= \frac{1}{n!} \times \left(\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} + \frac{(m+n)!}{(m-2)!} + \dots + n! \right) \\ &= \frac{(m+n)!}{(n+1)!(m-1)!} \quad (\text{d'après le lemme technique}) \end{aligned}$$

Cela prouve l'égalité pour $n+1$, donc la proposition B.1 par récurrence. ▲

Quel est le comportement de $|g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)|$ lorsque m tend vers $+\infty$?

Puisque $|g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)| = \frac{(m+n-1) \times \dots \times m}{n!}$, nous avons :

$$\frac{m^n}{n!} \leq |g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)| \leq \frac{(m+n-1)^n}{n!}$$

Or, il existe un nombre m_0 tel que $\forall m \geq m_0, m \geq n-1$. Donc pour tout $m \geq m_0$, on a :

$$\theta_1 m^n = \frac{m^n}{n!} \leq |g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)| \leq \frac{2^n m^n}{n!} = \theta_2 m^n$$

D'où : $\boxed{|g_{leximin}(\llbracket 1, m \rrbracket^n)| = O_{m \rightarrow \infty}(m^n)}$

B.2 Représentation du préordre leximin

B.2.1 Par une moyenne pondérée ordonnée

Proposition B.2 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un OWA qui représente l'ordre leximin.*

Démonstration Soit \mathcal{U} l'ensemble des utilités possibles. On note $m = \min\{|u - u'| \mid (u, u') \in \mathcal{U}^2, u \neq u'\}$ et $M = \max\{|u - u'| \mid (u, u') \in \mathcal{U}^2\}$ (ces nombres existent car \mathcal{U} est fini). Puisque $\forall i, \frac{x^i - 1}{x^{i+1} - x^i} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$, il est possible de trouver un $K \geq 1$ (assez grand) tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{K^i - 1}{K^{i+1} - K^i} < \frac{m}{M}$. On notera g_{lex} l'OWA $g^{(K^n, \dots, K, 1)}$.

▷ Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'utilités tels que $\vec{u} \succ_{leximin} \vec{v}$. Soit j tel que $\forall i < j, u_i^\uparrow = v_i^\uparrow$, et $u_j^\uparrow > v_j^\uparrow$. Alors $g_{lex}(\vec{u}) - g_{lex}(\vec{v}) = K^{n-j}(u_j^\uparrow - v_j^\uparrow) + \sum_{i=j+1}^n nK^{n-i}(u_i^\uparrow - v_i^\uparrow)$. Par définition de m et M on a donc :

$$\begin{aligned} g_{lex}(\vec{u}) - g_{lex}(\vec{v}) &> mK^{n-j} - M \sum_{i=0}^{j-1} K^{n-i} > mK^{n-j} - M \frac{K^{n-j} - 1}{K - 1} \\ &> mK^{n-j} - M \frac{m}{M} K^j > 0 \end{aligned}$$

Donc si $\vec{u} \succ_{leximin} \vec{v}$ alors $g_{lex}(\vec{u}) > g_{lex}(\vec{v})$.

▷ Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'utilités tels que $g_{lex}(\vec{u}) > g_{lex}(\vec{v})$. Supposons que $\vec{v} \succeq_{leximin} \vec{u}$. Si $\vec{v} \succ_{leximin} \vec{u}$ alors $g_{lex}(\vec{v}) > g_{lex}(\vec{u})$, et si $\vec{v} \sim_{leximin} \vec{u}$ alors $\vec{v}^\uparrow = \vec{u}^\uparrow$ donc $g_{lex}(\vec{u}) = g_{lex}(\vec{v})$ (par définition d'un OWA). Donc $\vec{v} \succeq_{leximin} \vec{u} \Rightarrow g_{lex}(\vec{v}) \geq g_{lex}(\vec{u})$, incompatible avec l'hypothèse de départ. On a donc si $g_{lex}(\vec{u}) > g_{lex}(\vec{v})$ alors $\vec{u} \succ_{leximin} \vec{v}$. \blacktriangle

B.2.2 Par une fonction somme des puissances

Proposition B.3 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un $p < 0$ tel que $g^{(p)}$ représente l'ordre leximin pour tout $p' \leq p$.*

Démonstration Soit \mathcal{U} l'ensemble des utilités possibles. On note $m = \min\{|u - u'| \mid (u, u') \in \mathcal{U}^2, u \neq u'\}$ et $M = \max\{u \mid u \in \mathcal{U}\}$. Puisque $m/M > 0, (1 + m/M)^p \xrightarrow{p \rightarrow -\infty} 0$, donc $\exists p_0 < 0$ tel que $\forall p \leq p_0, n(1 + m/M)^p \leq 1$.

▷ Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'utilités tels que $\vec{u} \succ_{leximin} \vec{v}$. Soit j tel que $\forall i < j, u_i^\uparrow = v_i^\uparrow$, et $u_j^\uparrow > v_j^\uparrow$. Alors $\forall p \leq p_0, g^{(p)}(\vec{u}) - g^{(p)}(\vec{v}) = \sum_{i=j}^n n(v_i^{\uparrow p} - u_i^{\uparrow p})$. Puisque $u_j^\uparrow > v_j^\uparrow$, nous avons $u_j^\uparrow \geq v_j^\uparrow + m$. De plus, $\forall i \geq j, u_i^\uparrow \geq u_j^\uparrow$, donc $u_i^\uparrow \geq v_j^\uparrow + m$, et donc $u_i^{\uparrow p} \leq (v_j^\uparrow + m)^p$. D'où au final $\sum_{i=j}^n u_i^{\uparrow p} \leq n(v_j^\uparrow + m)^p$. Puisqu'en outre $v_i \geq 0$ pour tout i , on a donc

$$\sum_{i=j}^n n(v_i^{\uparrow p} - u_i^{\uparrow p}) \geq v_j^{\uparrow p} - n(v_j^\uparrow + m)^p. \quad (\text{B.2})$$

Or, $v_j^\uparrow \leq M$. Nous avons donc :

$$\frac{m}{v_j^\uparrow} \geq \frac{m}{M} \Rightarrow \left(1 + \frac{m}{v_j^\uparrow}\right)^p \leq \left(1 + \frac{m}{M}\right)^p \Rightarrow n \left(1 + \frac{m}{v_j^\uparrow}\right)^p \leq n \left(1 + \frac{m}{M}\right)^p.$$

Or par définition de p , nous avons $n(1 + m/M)^p \leq 1$. D'où $n \left(1 + \frac{m}{v_j^\dagger}\right)^p \leq 1$. Nous avons donc $n \left(v_j^\dagger + m\right)^p \leq v_j^{\dagger p}$, et donc $v_j^{\dagger p} - n \left(v_j^\dagger + m\right)^p \leq 0$. Cela nous donne au final, avec l'inéquation (B.2), $g^{(p)}(\vec{u}) - g^{(p)}(\vec{v}) \geq 0$.

▷ Soit p défini comme ci-dessus et soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs d'utilités tels que $g^{(p)}(\vec{u}) > g^{(p)}(\vec{v})$. Supposons que $\vec{v} \succeq_{\text{leximin}} \vec{u}$. Si $\vec{v} \succ_{\text{leximin}} \vec{u}$ alors $g^{(p)}(\vec{v}) > g^{(p)}(\vec{u})$, et si $\vec{v} \sim_{\text{leximin}} \vec{u}$ alors $\vec{v}^\dagger = \vec{u}^\dagger$ donc $g^{(p)}(\vec{u}) = g^{(p)}(\vec{v})$ (car $g^{(p)}$ est une fonction symétrique). Donc $\vec{v} \succeq_{\text{leximin}} \vec{u} \Rightarrow g^{(p)}(\vec{v}) \geq g^{(p)}(\vec{u})$, incompatible avec l'hypothèse de départ. On a donc si $g^{(p)}(\vec{u}) > g^{(p)}(\vec{v})$ alors $\vec{u} \succ_{\text{leximin}} \vec{v}$. ▲

B.3 Le cas particulier de la fonction somme des puissances

Comme nous l'avons vu précédemment, pour un ensemble fini \mathcal{U} de vecteurs, il existe un $p_0 < 0$ tel que $g^{(p)}$ représente le préordre leximin sur \mathcal{U} pour tout $p \leq p_0$. Nous allons chercher dans cette section à calculer le plus grand p_0 possible pour un \mathcal{U} donné. Afin de clarifier les notations, nous allons noter $q = -p$, et $w^{(q)} = g^{(-p)}$, et nous chercherons donc le plus petit $q > 0$ tel que $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin pour un \mathcal{U} donné. Nous supposons pour simplifier que les vecteurs sont formés de composantes entières pouvant prendre leurs valeurs entre 0 et M .

B.3.1 Le cas critique

Nous avons la proposition suivante :

Proposition B.4 *La fonction $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin si et seulement si pour tout $x_0 \in \llbracket 0, M \rrbracket$, $w^{(q)}(x_0, M, \dots, M) < w^{(q)}(x_0 + 1, \dots, x_0 + 1)$.*

La preuve de cette proposition est fondée sur un lemme un peu moins fort :

Lemme 22 *La fonction $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin si et seulement si pour tout $x_0 \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$, et pour tout $k < n$:*

$$w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \dots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0 + 1, \dots, x_0 + 1).$$

Démonstration L'un des sens de l'équivalence est immédiat. Si $w^{(q)}$ représente l'ordre leximin, alors elle doit classer correctement les vecteurs $(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \dots, M)$ et

$$(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0 + 1, \dots, x_0 + 1).$$

Supposons que pour tous $x_0 \in \llbracket 0, M \rrbracket$ et $k < n$ on a $w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \dots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0 + 1, \dots, x_0 + 1)$. Alors on a $-(n-k)M^{-q} - x_0^{-q} < -(n-k+1)(x_0+1)^{-q}$.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs (que nous supposons triés dans l'ordre croissant) tels que $\vec{u} \prec_{\text{leximin}} \vec{v}$. On note k l'entier tel que $\forall i < k$, $u_i = v_i$ et $u_k < v_k$. Nous avons $-(n -$

$k)M^{-q} - u_k^{-q} < -(n - k + 1)(u_k + 1)^{-q}$. Donc :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n - k)M^{-q} - u_k^{-q} < \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n - k + 1)(u_k + 1)^{-q} \\
 \Rightarrow & \sum_{i=1}^{k-1} -u_i^{-q} - (n - k)M^{-q} - u_k^{-q} < \sum_{i=1}^{k-1} -v_i^{-q} - (n - k + 1)(u_k + 1)^{-q} \quad \blacktriangle \\
 \Rightarrow & \sum_{i=1}^n -u_i^{-q} < \sum_{i=1}^n -v_i^{-q} \\
 \Rightarrow & w^{(q)}(\vec{u}) < w^{(q)}(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

Démonstration (Proposition B.4) Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \dots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0 + 1, \dots, x_0 + 1) \\
 \Leftrightarrow & -(n - k)M^{-q} - x_0^{-q} < -(n - k + 1)(x_0 + 1)^{-q} \\
 \Leftrightarrow & (n - k)M^{-q} + x_0^{-q} - (n - k + 1)(x_0 + 1)^{-q} > 0
 \end{aligned}$$

Notons $h : (x, n, k, q, M) \mapsto (n - k)M^{-q} + x_0^{-q} - (n - k + 1)(x_0 + 1)^{-q}$. h est dérivable par rapport à k , et on a $\frac{\partial h}{\partial k} = -M^{-q} + x_0^{-q}$. Donc pour tout $x_0 < M$, $\frac{\partial h}{\partial k} > 0$. Donc $h(x, n, k, q, M) > 0 \Leftrightarrow h(x, n, 1, q, M) > 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
 & w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k \text{ fois}}, M, \dots, M) < w^{(q)}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k-1 \text{ fois}}, x_0 + 1, \dots, x_0 + 1) \\
 & \Leftrightarrow w^{(q)}(x_0, M, \dots, M) < w^{(q)}(x_0 + 1, \dots, x_0 + 1). \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

B.3.2 Calcul du q minimal

Nous devons trouver le q minimal q_{min} tel que $w^{(q)}(x_0, M, \dots, M) < w^{(q)}(x_0 + 1, \dots, x_0 + 1)$, c'est-à-dire tel que :

$$(n - 1)M^{-q} + x_0^{-q} - n(x_0 + 1)^{-q} > 0. \quad (\text{B.3})$$

Par la suite nous noterons f la fonction suivante :

$$f : x \mapsto (n - 1)M^{-q} + x^{-q} - n(x + 1)^{-q}.$$

B.3.2.1 Tableau de variation de f

Nous avons $f'(x) = nq(x + 1)^{-(q+1)} - qx_0^{-(q+1)}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) > 0 & \Leftrightarrow n(x + 1)^{-(q+1)} - x_0^{-(q+1)} > 0 \\
 & \Leftrightarrow n > \left(\frac{x + 1}{x}\right)^{q+1} \\
 & \Leftrightarrow {}^{q+1}\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{x} \\
 & \Leftrightarrow x > \frac{1}{{}^{q+1}\sqrt{n} - 1}
 \end{aligned}$$

La fonction f prend donc son minimum en $\frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}}$, et ce minimum vaut :

$$f\left(\frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}}\right) = (n-1)M^{-q} + (q+\sqrt[q]{n-1})^q(1-n^{\frac{q}{q+1}}).$$

Le tableau de variations de la fonction f est donc le suivant :

x	0	$\frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}}\right)$	$(n-1)M^{-q}$

B.3.2.2 Une borne supérieure de q_{min}

Il semble très difficile de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dont la solution est nécessaire pour trouver le q minimal cherché (même Maple capitule). En revanche, une condition suffisante pour que f soit positive sur tout $[0, M-1]$ est (1) qu'elle soit décroissante sur tout cet intervalle, et (2) que $f(M-1) > 0$.

Pour que la condition (1) soit vraie, il suffit que $\frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}} > M-1$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q+\sqrt[q]{n-1}} > M-1 &\Leftrightarrow q+\sqrt[q]{n-1} < \frac{1}{M-1} \\ &\Leftrightarrow q+\sqrt[q]{n} < \frac{M}{M-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{q+1} < \ln\left(\frac{M}{M-1}\right) \\ &\Leftrightarrow q > \frac{\ln(n)}{\ln\left(\frac{M}{M-1}\right)} - 1. \end{aligned}$$

Pour que la condition (2) soit vraie, il faut que :

$$\begin{aligned} f(M-1) > 0 &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (M-1)^{-q} - nM^{-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow (M-1)^{-q} - M^{-q} > 0 \\ &\Leftrightarrow M > 0. \end{aligned}$$

Cette condition est toujours vraie. Nous avons donc une borne supérieure de q_{min} :

$$q_{min} \leq \frac{\ln(n)}{\ln\left(\frac{M}{M-1}\right)} - 1$$

B.3.2.3 Une deuxième borne supérieure de q_{min}

Si q est tel que $f\left(\frac{1}{q+1\sqrt[n]{n}-1}\right) > 0$, alors dans f est positive sur tout son domaine de définition. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{q+1\sqrt[n]{n}-1}\right) > 0 &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}} - 1)^q - n \cdot \left(\frac{n^{\frac{1}{q+1}} - 1}{n^{\frac{1}{q+1}}}\right)^q > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}} - 1)^q \times \left(1 - \frac{n}{n^{\frac{1}{q+1}}}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} + (n^{\frac{1}{q+1}} - 1)^q \times (1 - n^{\frac{1}{q+1}}) > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)M^{-q} - (n^{\frac{1}{q+1}} - 1)^{q+1} > 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation ne semble pas évidente à première vue à résoudre analytiquement. Un angle d'attaque serait peut-être de prouver l'implication suivante :

$$f\left(\frac{1}{q+1\sqrt[n]{n}-1}\right) > 0 \Rightarrow q+1\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{1}{M-1}. \quad (\text{B.4})$$

Dans ce cas, on aurait montré que la valeur minimale de f ne peut pas être positive si la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est minimal est avant M . Dans ce cas, le q_{min} serait donc égal à la borne supérieure trouvée précédemment.

Annexe C

Calcul des indices d'inégalité généralisés

Nous détaillons dans cette annexe le calcul des indices d'inégalité généralisés aux droits inégaux. Nous emploierons, dans cette annexe, la notation simplificatrice suivante :

$$u' \stackrel{def}{=} \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{e}}.$$

En conséquence, la notation $\overline{u'}$ désignera $\overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{e}}$, c'est-à-dire : $\overline{u'} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n u_i = \frac{n}{m} \overline{u}$.

C.1 Indices d'Atkinson généralisés

C.1.1 $q \neq 0$

L'indice d'inégalité d'Atkinson classique correspondant à un entier $q \neq 0$ pour n agents s'écrit comme suit :

$$J_q(\overline{u}) = 1 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{\overline{u}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{e}}$:

$$J_{q, \overrightarrow{e}}(\overline{u'}) = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{u'_i}{\overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n e_i \left(\frac{u_i}{e_i \overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} = 1 - \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n e_i^{1-q} \left(\frac{u_i}{\overline{u'}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

D'où : $J_{q, \overrightarrow{e}}(\overline{u'}) = 1 - \frac{m}{n} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n e_i^{1-q} \left(\frac{u_i}{\overline{u}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$

C.1.2 $q = 0$

L'indice d'inégalité d'Atkinson classique correspondant à 0 pour n agents s'écrit comme suit :

$$J_0(\overline{u}) = 1 - \left(\prod_{i=1}^n \frac{u_i}{\overline{u}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = u \triangleright_{\vec{e}}^{div}$:

$$J_{0, \vec{e}}(\vec{u}) = 1 - \left(\prod_{i=1}^m \left(\frac{u'_i}{e_i u'} \right)^{e_i} \right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{e_i u'} \right)^{e_i} \right)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{m}{n} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{e_i \bar{u}} \right)^{e_i} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{D'où : } J_{0, \vec{e}}(\vec{u}) = 1 - \frac{m}{n} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{u_i}{e_i \bar{u}} \right)^{e_i} \right)^{\frac{1}{m}}$$

C.2 Indice de Gini généralisé

C.2.1 Première formulation

La première formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\vec{u}) = \frac{\sum_{k=1}^n (k\bar{u} - L(\vec{u})_k)}{\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n u_i}$$

Par simple substitution du profil d'utilités u par le profil $u' = u \triangleright_{\vec{e}}^{div}$, on obtient l'expression suivante :

$$G_{\vec{e}}(\vec{u}) = \frac{\sum_{k=1}^m (k\bar{u}' - L_{\vec{e}}(\vec{u})_k)}{\frac{m}{2} \sum_{i=1}^n u_i}$$

C.2.2 Deuxième formulation

La deuxième formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\vec{u}) = 1 - \frac{1}{n^2 \bar{u}} \left(\sum_{k=1}^n (2(n-k) + 1) u_k^\uparrow \right)$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = u \triangleright_{\vec{e}}^{div}$:

$$G_{\vec{e}}(\vec{u}) = 1 - \frac{1}{m^2 \bar{u}'} \left(\sum_{k=1}^m (2(m-k) + 1) u_k'^\uparrow \right) = 1 - \frac{1}{nm \bar{u}} \left(\sum_{k=1}^n (2m+1) \left(\frac{u_k}{e_k} \right)^{\uparrow \frac{u}{e}} - \underbrace{\sum_{k=1}^m 2k u_k'^\uparrow}_A \right)$$

Si nous posons $E_k = \sum_{i=1}^k e_i^{\uparrow \frac{u}{e}}$ (avec $E_0 = 1$), nous avons : $A = \sum_{k=1}^n \sum_{i=E_{k-1}}^{E_k} 2i \left(\frac{u_k}{e_k} \right)^{\uparrow \frac{u}{e}}$.

En remarquant que $\sum_{i=k_1}^{k_2} i = \frac{(k_2 + k_1)((k_2 - k_1) + 1)}{2}$, nous avons :

$$A = \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{u_k}{e_k} \right)^{\uparrow \frac{u}{e}} \frac{(E_k + E_{k-1})((E_k - E_{k-1}) + 1)}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{u_k}{e_k} \right)^{\uparrow \frac{u}{e}} (2E_{k-1} + e_k^{\uparrow \frac{u}{e}})(e_k^{\uparrow \frac{u}{e}} + 1).$$

En remplaçant A dans l'expression de $G_{\vec{e}}(\vec{u})$, nous obtenons donc :

$$G_{\vec{e}}(\vec{u}) = 1 - \frac{1}{nm\bar{u}} \sum_{k=1}^n (2m + 1 - (2E_{k-1} + e_k^{\uparrow \frac{u}{e}})(e_k^{\uparrow \frac{u}{e}} + 1)) \left(\frac{u_k}{e_k} \right)^{\uparrow \frac{u}{e}}$$

C.2.3 Troisième formulation

La troisième formulation de l'indice d'inégalité de Gini classique pour n agents s'écrit comme suit :

$$G(\vec{u}) = \frac{1}{2n^2\bar{u}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |u_i - u_j|.$$

Appliquons cette définition au profil d'utilités $u' = \overrightarrow{u \triangleright \frac{div}{e}}$:

$$G_{\vec{e}}(\vec{u}') = \frac{1}{2m^2\bar{u}'} \sum_{1 \leq i, j \leq m} |u'_i - u'_j| = \frac{1}{2mn\bar{u}} \sum_{1 \leq i, j \leq m} |u'_i - u'_j|$$

Les seules valeurs possibles pour $|u'_i - u'_j|$ sont les $|u_k/e_k - u_l/e_l|$, pour $1 \leq k, l \leq n$. Pour $1 \leq i, j \leq m$, u'_i et u'_j prennent e_k fois la valeur u_k/e_k , et e_l fois la valeur u_l/e_l . Donc $|u'_i - u'_j|$ prend $e_k e_l$ fois la valeur $|u_k/e_k - u_l/e_l|$ et $e_k e_l$ fois la valeur $|u_l/e_l - u_k/e_k|$.

$$\text{D'où : } G_{\vec{e}}(\vec{u}') = \frac{1}{2nm\bar{u}} \sum_{1 \leq k, l \leq m} e_k e_l \left| \frac{u_k}{e_k} - \frac{u_l}{e_l} \right|$$

Index

A

- Absence d'envie **31**, 35, 117
 - faible, 31
 - forte, 31
 - généralisée, 62
 - test d', 35
- ADE voir Avantage aux droits élevés
- Admissibilité .. voir Contrainte d'admissibilité
- Adéquation
 - Principe de, 28
- Agent 7
- Agrégation
 - collective, 123
 - individuelle, 122
 - opérateur d', **32**, 158, 162, 210
- Allocation
 - minimalement régulière, 136
 - régulière, 128, 136, 142
- Anonymat 33, 40
 - généralisé, 60
- Arc-cohérence 175
 - généralisée, 175, 182
- Atkinson (Indices d') 39
 - généralisés, 65
- Avantage aux droits élevés 69

B

- Banqueroute (exemple) 54, 74
- Base de buts 95
 - pondérée, 97
 - stratifiée, 95
- BDD voir Diagramme de décision binaire
- Borne-cohérence 176, 186, 190
- Branch-and-bound 174, 181

C

- Cardinale voir Structure de préférences
- Clause 87
- Clones 58
- CNF 87
- Comité (exemple) 53, 74

Compensation

- Principe de, **28**
- Compensation monétaire 16, 17, 222
- Compilation de connaissances 88
- Conformité 69
- Contrainte 7, **85**
 - At Least, 187
 - d'admissibilité, 18–19, 121
 - d'exclusion, 19, 121, 163
 - de préemption, 19, 116, 121, 158, 160, 210
 - de volume, 19, 162, 198, 210
 - globales, 177
 - Leximin, 182
 - logique, 121, 210
 - Multiset Ordering, 182
 - propagation, 174–176
 - Sort, 186
- Courbe de Lorenz voir Lorenz
- CP-nets 222
- Cube 87

D

- Demande pondérée 122
- Diagramme de décision
 - algébrique, 98
 - binaire, 89
- Dichotomique .. voir Structure de préférences
- Division voir Fonction de répartition
- DNF 87
- Domaine 83
- Dominance stochastique
 - du premier ordre, 67
 - du second ordre, 67
- Droits exogènes
 - ordinaux, 76
 - Principe de, **28**
 - Vecteur, 57
 - normalisé, 57

E

- [EEF EXISTENCE] (problème) 128

- EEF (Efficient and Envy-Free) 119
- Efficacité 7
- Complétude, 141
 - Maximisation d'une fonction d'utilité collective, 146
 - Nombre maximal d'agents, 141
 - Pareto-, 33, 60, 118, 149
- Égalitarisme 29, 35, 41
- Enchères combinatoires 10, 48
- langage de mises, voir Langage de représentation de préférences
 - Mise, 109
 - équitables, 205
- Équité 7, 17, 26–28, 30, 34–39, 60–68
- Principe d', 27
- Espace
- d'alternatives combinatoires, 83
 - Représentation logique, 87
 - d'objets, 92
 - des allocations, 84
 - Représentation logique, 88
- Étalement à moyenne constante 68
- ## F
- Fonction cumulative 66
- Fonction d'utilité 24
- Fonction d'utilité collective 32
- de Kalai-Smorodinsky, 47
 - de Nash, 43, 76
 - OWA, 46, 195
 - étendus, 73
 - somme des puissances, 43
 - généralisée, 71
 - utilitariste classique, 41
 - étendue, 58
 - à droits inégaux, 58
 - égalitariste, 41
 - étendue, 58
- Fonction de répartition 58
- Division, 56, **58**
 - Réplication (indivision), 56, **58**
- Fonction décumulative 66
- ## G
- GAI-décomposition voir Indépendance additive généralisée
- Gini (Indice de) 39
- généralisé, 65
- Générateur (d'instances) 199, 205, 211
- ## H
- Heuristique 193, 202, 207, 213
- ## I
- IDCD voir Insensibilité à une dilatation commune des droits
- If-then-else (opérateur logique) 89
- Incomparabilité (relation d') 22
- Indice
- d'Atkinson, voir Atkinson
 - d'inégalité, voir Inégalités
 - de Gini, voir Gini
 - de pouvoir, 54
- Indifférence (relation d') 22
- Indivision voir Fonction de répartition
- Indépendance
- additive généralisée, 105
 - préférentielle, 100
 - vis-à-vis des agents non concernés, 34, 40
 - généralisée, 60
 - vis-à-vis des échelles individuelles d'utilité, 43
- Inférence sceptique voir Sceptique
- Insensibilité
- à une dilatation commune croissante quelconque des utilités, 41
 - à une dilatation commune des droits, 70
 - à une dilatation linéaire commune des utilités, 41
- Instanciation 83
- Interpersonnelle (comparaison) 29, 40
- Inégalités
- indice d', 38, 40
 - généralisé, 65
 - principe de réduction des, 36
 - généralisé, 63
 - réduction des, 40
 - généralisé, 63
 - transfert réduisant les, 36
- IUA voir Indépendance vis-à-vis des agents non concernés, voir Indépendance vis-à-vis des agents non concernés
- ## J
- Juste part
- garantie, 34, 40
 - généralisée, 61
 - test de, 34
- Justice
- distributive, 27

- procédurale, 30
téléologique, 30
- L**
- Langage de représentation de préférences . 91,
113
k-additif, 104
best-out, 96
ceteris paribus, 98–100
discrimin, 96
leximin, 96
Card, 96
compact sous forme logique, 145
numérique, 146
CP-*net*, 100–103
dichotomique, 115
GAI-*net*, 105
langage de mises
Generalized Weighted Logic, 112
logique, 112
mises atomiques, 109
OR, 110
OR-of-XOR, 111
OR/XOR, 111
OR^{*}, 111
XOR, 110
XOR-of-OR, 111
logique pondérée, 97, 210
Pareto, 95
propriétés
compacité relative, 93, 94
complexité computationnelle, 93, 94
pertinence cognitive, 93
puissance expressive, 93, 94
élicitation, 93, 94
TCP-*net*, 103
UCP-*net*, 103
à base de distance, 97
- Leximin
préordre, 42, 169
à seuil, 195
- Littéral 87
- Logique
Modélisation des préférences à base de, 94
- Loi d'ignorance 29
- Lorenz 208
courbe de, 36
avec droits inégaux, 64
dominance de, 37
- Loterie 66
- M**
- Manipulation 224
- Max-min
/ max-sum (critère), 170
transformations, 191
- [MAX-CUF] (Problème) 154
- Maximal-consistant (sous-ensemble) 118
- Monotonie (des préférences) 26, 122
- Moyennes pondérées ordonnées . voir Fonction
d'utilité collective OWA
- Multicritère (optimisation) 170
- Méta-contrainte de cardinalité voir
Contrainte At Least
- Méthode faible 77
- Méthode forte 76
- Möbius (transformation de) 104
- N**
- NNF 87, 89
DNNF, d-NNF, s-NNF, d-DNNF, sd-
DNNF, 89
f-NNF, 89
VNNF, 98
- Non-monotone (raisonnement) 120
- Normalisation des utilités 47
- Noyade (effet de) 41
- O**
- Ordinale voir Structure de préférences
- Ordre voir Relation binaire
- Ordre de bien-être collectif 32
à droits inégaux, 58
- OWA . voir Fonction d'utilité collective OWA
- P**
- Pareto
efficacité , voir Efficacité
relation de, 33
- Partage 16
admissible, 18
centralisé, 48–50
distribué, 48–50
répété, 50
- Partage de biens indivisibles (Problème) .. 51
- PFU 108
- Pigou-Dalton voir Inégalités (principe de
réduction)
- Pléiades 7, 198, 211

- Principe de duplication 57, **58**
 Problème de satisfaction de contraintes .. 171
 [**MAXLEXIMIN**CSP], 172
 avec variable objectif, 171
 Programmation linéaire 170, 202
 Programmation par contraintes 173–178
 événementielle, 177
 Proportionnalité 34
 Prémption ... voir **Contrainte de prémption**
 Préférences
 additives, 198
 clauses, 135
 closes pour la conjonction, 140
 cubes, 135, 136
 dichotomiques, 127–145
 identiques, 132, 149
 monotones, 132, 145, 149, 150
 numériques additives, 149, 160
 0–1, 150
 0–1 stratifiées, 152
 0–1–...– k , 152
 numériques modulaires, voir **Préférences**
 numériques additives
 Préordre voir **Relation binaire**
 Pseudo-distance 97
- R**
- R(O)BDD voir **Diagramme de décision binaire**
 Radio (exemple) 75
 Relation binaire 20
 d'ordre, 21
 d'équivalence, 21
 de préordre, 21
 Ordre d'intervalle, 25
 Semi-ordre, 25
 Ressource 7, 15–19
 continue, **16**
 homogène, 16
 hétérogène, 17
 discrète, **16**, 17
 indivisible, **16**
 mixte, 16
 Risque
 aversion pour le, 68
 décision en présence de, 66
 Récompense
 Principe de, **28**
 Réduction des inégalités voir **Inégalités**
 Réseau de comparaisons 191
 Réseau de contraintes 85, 171
 consistant, 85
 contrainte, 85
 domaine, 85
 instanciation cohérente, 85
 solution, 85
 valué, 107
 variable, 85
- S**
- Sceptique
 [RSI] (problème), 128
 conséquence, 119
 inférence, 119, 128
 Seuil 25
 Shannon (expansion de) 90
 Sous-ensemble saturé 183
 Spot 212
 Stochastique (dominance) ... voir **Dominance**
 stochastique
 Structure de préférences
 cardinale, **24**, 96–98, 103–112
 dichotomique, **23**, 94–95, 115
 floue, 25
 ordinaire, **22**, 95–96, 98–103
 qualitative, 23
 à base d'intervalles, 25
 à seuil, 25
 Structure de valuation 23
 Séparabilité 34
- T**
- Théorie des défauts 119
 Tracteur 100
 Trex 9, 215
- U**
- Unanimité 33, 40
 Utilitarisme classique 29, 41
 Utilité 24, 29
 collective, 123
 individuelle, 122
- V**
- Variable 83
 aléatoire discrète, 66
 d'un réseau de contraintes, 85
 Vecteur de droits exogènes voir **Droits**
 exogènes
 Vecteur de poids étendu 73

VNNF voir NNF

W

Welfarisme 28

 macro-, 30

 micro-, 30

Winner Determination Problem . 10, 108, 124,
 159, 205