Chapitre 1
Partage et décision collective

La définition générique du problème de partage présentée dans le chapitre d'introduction englobe, comme nous l'avons fait remarquer, un ensemble hétérogène de problèmes. Nous allons introduire dans ce chapitre les principales notions liées à la définition des problèmes de partage. L'objectif est de présenter un aperçu étendu de ces différents problèmes. L'introduction de ces notions nous permettra ainsi de limiter l'étendue de notre étude à un cadre bien précis, et nous fournira les bases nécessaires à la modélisation de ces problèmes.

La vue d'ensemble du problème de partage que nous proposons ici est centrée sur les questions qui suivent. Sur quel type de ressource travaille-t-on exactement ? Comment cette ressource est-elle allouée ? Comment les agents expriment-ils leurs préférences ? Sur quel(s) critère(s) peut-on juger de la qualité d'un partage ? La manière d'aborder ces questions est inspirée de l'article [Chevaleyre *et al.*, 2006a] qui présente une vue d'ensemble générale sur les problèmes d'allocation de ressources multiagent.

1.1 La ressource

La ressource, qui est par essence en quantité limitée, est le point central des problèmes de partage. Sa nature et les contraintes qui en restreignent l'allocation déterminent le type du problème à traiter. Nous supposons avant toute chose que nous sommes dans un contexte *statique*, c'est-à-dire que la ressource n'évolue pas dans le temps (ce qui n'est pas le cas par exemple pour des denrées périssables, du carburant, ou encore les prises de vues du satellite Pléiades, qui perdent leur valeur si elles sont délivrées trop tard). Cette dernière approximation est cependant raisonnable pour la plupart des problèmes de partage réels.

1.1.1 La nature de la ressource

La première distinction entre les différents problèmes de partage porte généralement sur le type de la ressource elle-même. On distingue traditionnellement deux grands types de ressource : ressource *continue*, ou ressource *discrète*. Passant outre la farouche bataille épistémologique sur l'existence du continu dans le monde réel, nous nous contenterons d'une définition simple et intuitive de cette dualité. Alors qu'une ressource continue peut être *a priori* divisée indéfiniment (du moins à notre niveau de modélisation), à l'instar d'une quantité numérique comme un volume, une masse, ou une quantité d'argent, une ressource discrète ne peut être divisée qu'un nombre fini de fois, jusqu'à arriver à un ensemble d'atomes indivisibles.

On peut faire, parmi les problèmes faisant intervenir une ressource discrète, un autre niveau de distinction, selon que la ressource est divisible (de manière finie, donc) ou non. En toute rigueur, ces deux cas ne sont pas différents l'un de l'autre, puisque dans le cas d'une ressource divisible, on peut travailler sur l'ensemble des atomes comme si l'on travaillait sur une ressource indivisible. Il s'agit donc plus d'une différence d'approche du problème que d'une propriété intrinsèque de la ressource. Cette remarque s'applique de même à la distinction entre les problèmes dits à unités multiples, qui font intervenir plusieurs instances de chaque objet, et les problèmes à unité simple, ne faisant intervenir qu'une seule instance de chaque objet. Dans la suite du document, on ne distinguera plus ressource discrète et ensemble de ressources indivisibles.

Certains problèmes peuvent faire intervenir une ressource mixte (des objets et un volume de liquide par exemple). Parmi ces problèmes figurent notamment ceux qui concernent l'allocation de ressources indivisibles avec compensation monétaire entre les agents. Dans ce genre de problèmes, la monnaie intervient comme une ressource continue ayant un statut spécial : elle ne fait pas partie de la ressource à partager à proprement parler, mais peut être utilisé sous forme de transferts entre agents pour compenser l'inéquité du partage. Une solution du problème de partage est donc dans ce cas-là une allocation de la ressource aux agents, et un ensemble de transferts monétaires entre les agents.

À la lueur de ces considérations, nous pouvons donc proposer une définition formelle de la notion de ressource, fondée sur la dichotomie ressource continue / ressource discrète :

Définition 1.1 (Ressource)
- *Une ressource* continue *est un ensemble en bijection avec* $[0, 1]$.
- *Une ressource* discrète *est un ensemble fini de ressources* indivisibles $\{o_1, \ldots, o_p\}$.

Nous pouvons à présent définir de manière formelle la notion de partage, ou d'allocation[1] :

Définition 1.2 (Partage) *Soient $\mathscr{R}$ une ressource et $\mathscr{N}$ un ensemble fini de n agents. Un* partage *de $\mathscr{R}$ entre les agents de $\mathscr{N}$ est un tuple $\overrightarrow{\pi} \in (\wp(\mathscr{R}))^n$. La composante π_i est appelée la* part *de l'agent i.*

En d'autres termes, un partage est simplement défini comme un vecteur de parts, une part étant une partie de la ressource revenant à un agent particulier. Notons que nous ne supposons pas ici que les parts sont disjointes deux à deux. Ce sera le cas seulement si la contrainte de préemption est présente, comme nous allons le voir un peu plus loin.

La nature de la ressource est une donnée cruciale dans la définition du problème de partage à traiter. Selon la nature de la ressource, on aboutit à des types de problèmes très différents dans leur difficulté, dans leur modélisation et dans leur traitement. À la lueur de la littérature sur le sujet, nous pouvons mettre en évidence les classes de problèmes suivantes, caractérisées par les types de ressources que les problèmes font intervenir.

- Une ressource continue et homogène, mais les agents ont un pouvoir imparfait. Précisons ce que l'on entend par là. Puisque la ressource est continue et homogène, les préférences des agents s'expriment comme une fonction de la quantité de ressource qu'ils reçoivent : trouver un partage équitable (si tant est que les agents ont un droit d'accès identique sur la ressource) revient dans ce cas-là à un problème d'optimisation continue sous contrainte : on cherche à égaliser un certain nombre de fonctions sous la contrainte que la somme des quantités allouées aux agents soit égale à la quantité de ressource disponible. Dans la plupart des problèmes, on suppose en plus que les préférences des agents sont identiques et dépendent linéairement de la quantité de ressource reçue, rendant le problème trivial (il suffit d'allouer à chaque agent

[1] Par la suite, nous emploierons les deux termes de manière interchangeable

le $n^{\text{ème}}$ de la ressource). La difficulté vient alors du fait que l'on est incapable de découper la ressource de manière très précise, et que les agents ont des perceptions différentes sur la quantité de ressource contenue dans une part (ainsi, un agent pourra estimer que sa part représente moins du $n^{\text{ème}}$ de la ressource, se sentant donc lésé dans le partage, alors qu'un autre agent estimera que cette même part représente une fraction supérieure au $n^{\text{ème}}$ de la ressource). Le nœud du problème se résume donc à la recherche d'une procédure permettant aux agents d'aboutir de manière décentralisée à un partage de la ressource que chacun estime juste. L'exemple typique d'application à ce problème est celui du partage d'un gâteau homogène (un exemple jouet dont l'intérêt dépasse largement l'aspect simpliste apparent du problème et qui mobilise de nombreux économistes et mathématiciens). Un autre exemple d'application concerne le partage de territoires ou de droits d'exploitation sur des ressources naturelles, si l'on considère en première approximation que ces ressources sont homogènes. Ce type de problème a abouti à la mise au point de méthodes du type «je coupe, tu choisis» (*divide-and-choose*), généralisées à n agents. On pourra lire avec profit [Brams et Taylor, 1996, 2000; Robertson et Webb, 1998] sur l'étude des procédures d'allocation de ressource divisible et homogène.

▷ La ressource est continue mais hétérogène, les préférences des agents, qui ont toujours un pouvoir imparfait, sont en rapport avec cette hétérogénéité. Ici la difficulté vient toujours du fait que les agents sont incapables de partager la ressource de manière parfaite, ajoutant à cela la difficulté supplémentaire liée à l'hétérogénéité de la ressource. Il existe de multiples exemples de problèmes de partage de ressources continues hétérogènes : partage de territoires, partage de n ressources continues, ... Ces problèmes sont étudiés en détail dans [Brams et Taylor, 1996, 2000], donnant lieu par exemple à des procédures telles que *Adjusted Winner*, utilisées dans des problèmes concrets. Notons que le problème de partage de gâteau est encore une fois considéré comme une métaphore de base pour désigner une ressource continue et hétérogène quelconque : ce genre de problèmes a l'avantage d'être simple à comprendre et illustratif. On pourra consulter l'article [Brams *et al.*, 2006] pour avoir un aperçu des procédures utilisées dans ce cas pour garantir l'équité ou encore l'absence d'envie.

▷ La ressource est discrète, mais des compensations monétaires sont possibles. Il s'agit de l'un des problèmes les plus étudiés dans la littérature sur le problème de partage (encore une fois, on pourra consulter les ouvrages de référence cités ci-dessus), car il englobe un grand nombre de problèmes réels pouvant s'avérer délicats, dans lesquels le besoin d'équité est crucial : problèmes de partage d'objets après divorce, héritage, ... Deux aspects sont concernés par ces problèmes : partage des objets indivisibles eux-mêmes, et calcul des compensations financières nécessaires au rétablissement de l'équité. L'objectif est donc de mettre au point des procédures permettant d'une part de se rapprocher le plus possible de l'équité lors du partage d'objet (équité dans le sens où chacun estime avoir sa «juste part»), et d'autre part d'atteindre effectivement l'équité à l'aide de compensations monétaires. Étant donné le contexte dans lequel ces procédures sont en général appliquées, elle nécessitent de plus d'être résistantes aux manipulations des agents, dans le sens où elle doivent dissuader les individus de falsifier leurs préférences. Un exemple de procédure classique étudiée dans ce contexte particulier est celle de Knaster.

▷ La ressource est discrète, mais les compensations monétaires sont impossibles. Il est rare dans ce type de problème que l'on puisse atteindre un état d'équité parfaite. On va donc chercher à s'en approcher le plus possible. On peut avoir affaire dans ce cas à deux types de problème très différents :

- Si le nombre d'objets en jeu est faible (dans le cas extrême, il peut n'y avoir qu'un seul objet, par exemple un rein à attribuer à un patient en attente de greffe), et que les agents ont des préférences simples, il s'agit d'un problème éthique ou moral, qui est de savoir à qui attribuer la ressource [Young, 1994]. Entrent en jeu des considérations telles que le besoin, le mérite, l'adéquation ou la priorité. Nous aurons l'occasion d'y revenir un peu plus loin.

- Si le nombre d'objets en jeu est élevé et que les agents ont des préférences complexes sur les objets, s'exprimant par des dépendances, on se trouve typiquement dans un cas de problème d'allocation combinatoire. Ici, la difficulté du problème est liée à l'explosion combinatoire due à la structure de l'espace des partages admissibles, comme nous le verrons au chapitre 3. C'est le domaine privilégié des problèmes d'enchères combinatoires[2] [Cramton *et al.*, 2006; Sandholm, 1999, 2002; Rothkopf *et al.*, 1998; Lehmann *et al.*, 1999].

Comme nous pouvons donc le constater, l'étude des problèmes de partage de ressource continue ou de ressource discrète avec compensations monétaires est une discipline traditionnelle et largement étudiée dans le domaine économique. En revanche, les quelques travaux récents en informatique et intelligence artificielle concernant le domaine du partage sont plutôt centrés sur des ressources discrètes.

Concluons notre discussion sur la nature de la ressource en remarquant que la limite entre les deux types de ressource est parfois difficile à appréhender, ou peut dépendre de l'approche utilisée pour modéliser ou résoudre le problème. Ainsi par exemple un problème impliquant une ressource continue peut être traité par discrétisation, c'est-à-dire en divisant la ressource en un ensemble de parts indivisibles, le processus d'allocation portant ensuite sur cet ensemble de parts : dans un problème de partage d'une réserve d'eau d'une capacité de 10000 litres, les agents peuvent s'accorder sur le partage de 200 unités de 50 litres plutôt que sur le partage au millilitre près de la ressource. Ainsi, une ressource continue peut être traitée en première approximation avec des techniques s'appliquant aux ressources discrètes, bien que ce ne soit pas toujours la méthode la plus efficace.

Dans d'autres problèmes, la ressource à partager elle-même peut dépendre de la modélisation adoptée. Considérons l'application 1 de partage d'une constellation de satellites. Cet exemple peut être abordé sous deux angles différents. Soit on considère que l'on partage l'ensemble de requêtes émises par les agents, et nous avons donc affaire à une ressource indivisible, soit on aborde le problème sous le point de vue du partage du temps d'utilisation de la constellation de satellites, le temps étant par essence une ressource continue.

1.1.2 Les contraintes d'admissibilité

Dans tout problème de partage, l'attribution de la ressource aux agents est soumise à un certain nombre de contraintes. Ces contraintes peuvent être notamment de nature physique (impossibilité par exemple d'attribuer le même objet à deux agents différents), ou encore de nature légale (impossibilité pour un agent d'acquérir plus d'une certaine quantité de ressource). Par «contrainte» nous désignerons toute condition imposée sur la ressource, qui restreint l'ensemble des allocations possibles aux agents, soit, de manière formelle :

Définition 1.3 (Contrainte d'admissibilité) *Soient $\mathscr{R}$ une ressource et $\mathscr{N}$ un ensemble fini d'agents. Une* contrainte d'admissibilité *sur l'attribution de la ressource aux agents de $\mathscr{N}$ est un sous-ensemble $C \subsetneq \wp(\mathscr{R})^n$.*

Cette définition ne fait aucune supposition sur la manière dont est exprimée la contrainte. Nous aurons l'occasion de revenir sur les langages d'expression de contraintes dans le chapitre 3. L'introduction de contraintes dans le partage nous permet de définir la notion d'*allocation admissible* :

[2] Même si, dans une certaine mesure, les compensations monétaires interviennent dans ce domaine, car un agent qui paie son lot est «compensé négativement», l'argent n'intervient pas en tant que ressource de base à partager, mais en tant que mesure d'utilité uniquement.

Définition 1.4 (Partage admissible) *Soient $\mathscr{R}$ une ressource, $\mathscr{N}$ un ensemble fini d'agents, et $\mathscr{C}$ un ensemble de contraintes. Un* partage admissible *de $\mathscr{R}$ entre les agents de $\mathscr{N}$ vis-à-vis de l'ensemble de contraintes $\mathscr{C}$ est un tuple $\overrightarrow{\pi} \in \bigcap_{C \in \mathscr{C}} C$. L'ensemble des partages admissibles sera noté $\mathscr{A}$.*

Parmi l'ensemble des contraintes possibles, une contrainte joue un rôle particulier, car elle est présente de manière naturelle dans la plupart des problèmes de partage. Il s'agit de la contrainte de préemption. Cette contrainte interdit l'allocation d'une même partie de la ressource à plusieurs agents ; en d'autres termes, elle impose aux parts des agents d'être disjointes deux à deux. Cette contrainte est présente naturellement dans la plupart des problèmes de partage, dans lesquels la ressource à allouer correspond à un bien physique et à une réalité matérielle. En revanche, certains problèmes faisant intervenir une ressource virtuelle sont affranchis de cette contrainte. Nous pouvons citer le problème Pléiades présentée dans l'application 1 : la ressource à partager est l'ensemble des prises de vue (si l'on adopte ce point de vue, et non le point de vue du partage du temps d'exploitation de la constellation), une même prise de vue pouvant être attribuée à plusieurs agents différents. Nous pouvons de même citer l'exemple d'une entreprise qui répartit les licences d'utilisation de ses logiciels entre ses employés : un même logiciel peut être utilisé par plusieurs employés différents, dans la limite du nombre de licences disponibles.

La contrainte de préemption s'exprime simplement comme suit, que la ressource soit continue ou non :

$$C_{preempt} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \forall i \neq j \ \pi_i \cap \pi_j = \varnothing\}.$$

Un certain nombre d'autres contraintes apparaissent de manière naturelle dans les problèmes de partage.

- ▷ Les contraintes d'exclusion empêchent une certaine partie de la ressource d'être attribuée entièrement au même agent : $\mathscr{S}_{excl}$ est le sous-ensemble de la ressource $\mathscr{R}$ (ce qui correspond dans le cas discret à un sous-ensemble d'objets $\mathscr{O}_{excl}$) qui ne peut être attribué au même agent, alors $C_{excl} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \forall i \ \pi_i \not\supseteq \mathscr{S}_{excl}\}$.
- ▷ On peut de même définir une contrainte d'exclusion globale, qui interdit l'attribution simultanée d'une partie de la ressource, même si cette partie n'est pas attribuée à un unique agent : $C_{glob\_excl} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \bigcup_i \pi_i \not\supseteq \mathscr{S}_{excl}\}$.
- ▷ Les contraintes de volume interdisent l'attribution de plus d'un certain volume de ressource à un agent, si l'on considère qu'à la ressource est attachée une fonction volume :
  - ressource continue : soient $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}^+$ une mesure sur $\mathscr{R}$, représentant la mesure de volume, et $V_{max} \in \mathbb{R}^+$ le volume maximum autorisé par agent, $C_{vol} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \forall i \mu(\pi_i) \leq V_{max}\}$;
  - ressource indivisible : soit $\nu : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de volume, et V_{max} le volume maximum autorisé par agent, $C_{vol} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \forall i \ \sum_{o \in \pi_i} \nu(o) \leq V_{max}\}$.

  Bien entendu, dans le cas indivisible, une contrainte de volume peut être traduite en un ensemble de contraintes d'exclusions (les objets dont le volume global est supérieur au volume maximal sont mutuellement exclusifs). À l'instar de la contrainte d'exclusion, on peut définir une contrainte de volume globale qui interdit l'attribution globale de plus d'un certain volume de ressource.
- ▷ Plus généralement, on peut définir des contraintes de dépendances entre objets, imposant par exemple l'attribution simultanée de deux objets différents à un même agent.

1.2 La notion de préférences

Le problème de partage de ressource fait intervenir une collectivité d'agents confrontés au problème épineux de la répartition de la ressource au sein de la collectivité. De ce point de vue, ce problème peut être vu comme un problème de décision (collective en l'occurrence), face à l'ensemble des alternatives (partages) possibles. Dès lors que l'on s'intéresse à la notion de décision impliquant des agents humains apparaît de manière naturelle la notion de préférences sur l'espace des alternatives. Comme le rappellent Denis Bouyssou et Philippe Vincke dans [Bouyssou et Vincke, 2006], la problématique de la modélisation des préférences intervient dans un ensemble de domaines très différents : économie, psychologie, sciences politiques, recherche opérationnelle, intelligence artificielle, ou de manière plus générale l'ensemble des domaines scientifiques dont s'inspire la théorie de la décision.

La notion de préférence intervient à deux niveaux dans les problèmes de partage, ou plus généralement dans les problèmes de décision collective.

▷ Au niveau individuel, chaque agent a des préférences sur l'issue du partage, représentant son propre point de vue personnel. La construction des préférences individuelles se fait généralement par un processus d'*élicitation*, et relève du domaine de la représentation et de l'expression des préférences, dont nous reparlerons dans le chapitre 3 consacré à la représentation compacte.

▷ Au niveau collectif, l'agrégation des préférences individuelles conduit à des préférences collectives sur l'issue du partage, reflétant l'ensemble des préférences (souvent contradictoires) individuelles. La construction des préférences communes relève du domaine de la décision collective : vote et choix social, ou théorie de l'utilitarisme, dont nous reparlerons plus loin dans ce chapitre.

1.2.1 Modélisation des préférences

Cette sous-section sera consacrée aux bases de la modélisation des préférences. Nous allons commencer par présenter l'approche classique en théorie de la décision, qui consiste à définir une structure de préférences ordinale. L'introduction et la présentation des outils de modélisation des préférences en théorie de la décision s'inspire de l'approche présentée dans des ouvrages comme [Vincke, 1989] ou dans [Bouyssou et Vincke, 2006]. Nous introduirons ensuite quelques structures de préférences classiques étendant la structure ordinale en y ajoutant des informations sur l'intensité des préférences par exemple.

1.2.1.1 Relations binaires

L'outil central de modélisation des préférences est la *relation binaire* :

Définition 1.5 (Relation binaire) *Étant donné un ensemble $\mathscr{E}$, une* relation binaire $\Re$ *sur $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$. On emploie habituellement la notation $x\Re y$ pour désigner $(x, y) \in \Re$.*

Une relation $\Re$ sera dite :

▷ *réflexive si et seulement si $x\Re x$ pour tout $x \in \mathscr{E}$;*

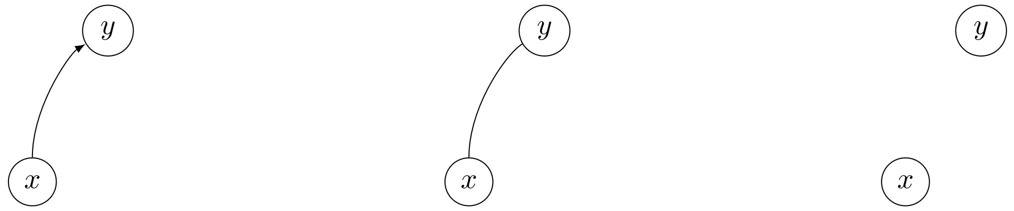
▷ *symétrique si et seulement si $x\Re y \Rightarrow y\Re x$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{E}^2$;*

▷ *antisymétrique si et seulement si $x\Re y$ et $y\Re x \Rightarrow x = y$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{E}^2$;*

▷ *transitive si et seulement si $x\Re y$ et $y\Re z \Rightarrow x\Re z$ pour tout $(x, y, z) \in \mathscr{E}^3$;*

▷ *complète si et seulement si $x\Re y$ ou $y\Re x$ pour tout $(x, y) \in \mathscr{E}^2$.*

Une relation binaire peut être représentée sous la forme d'un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de l'ensemble $\mathscr{E}$, et les arcs sont les couples (x, y) tels que $x\Re y$ (voir figure 1.1). Afin d'alléger la notation, on représentera sous la forme d'un arc non orienté la relation entre deux éléments x et y tels que $x\Re y$ et $y\Re x$. De même, dans le cas particulier de relations réflexives (comme ce sera le cas lors de la modélisation des préférences), nous ne représenterons pas les boucles (x, x).



$x\Re y$ et non $y\Re x$. $\quad$ $x\Re y$ et $y\Re x$. $\quad$ non $x\Re y$ et non $y\Re x$.

Figure 1.1 — Représentation d'une relation binaire sous forme d'un graphe.

Parmi les relations binaires, certaines sont d'importance dans la modélisation des préférences : les relations d'équivalence, les préordres et les ordres.

Définition 1.6 (Relation d'équivalence, classe d'équivalence) *Une* relation d'équivalence $\sim$ *est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

Si $\sim$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathscr{E}$*, on note, pour tout élément* $x \in \mathscr{E}$*,* $[x]_\sim$ *la classe d'équivalence de* x *pour* $\sim$*, c'est-à-dire l'ensemble* $\{y \in \mathscr{E} \mid x \sim y\}$*. L'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathscr{E}$ *pour* $\sim$ *est appelé* ensemble quotient de $\mathscr{E}$ par $\sim$*, forme une partition de* $\mathscr{E}$*, et est noté* $\mathscr{E}/\!\sim$*.*

Le graphe représentant une relation d'équivalence est un graphe non orienté (à cause de la propriété de symétrie), formé d'une forêt de cliques (à cause de la propriété de transitivité). Chaque clique représente une classe d'équivalence de la relation.

Définition 1.7 (Relation d'ordre) *Une* relation d'ordre $\geq$ *est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique. Si en plus la relation est complète, elle sera appelée* relation d'ordre total.

Une relation d'ordre effectue un rangement des éléments de $\mathscr{E}$, sans qu'il n'y ait d'*ex aequo* possible[3]. Nous noterons $>$ la relation d'ordre strict correspondant à la relation $\geq$, c'est-à-dire la relation telle que $x > y \Leftrightarrow x \geq y$ et non $y \geq x$. De même, $\max_{\geq} \mathscr{E}$ désignera l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ non dominés (optimaux) pour $\geq$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{E}$ tel que pour tout $\widehat{x} \in \mathscr{S}$ on a $\widehat{x} \not> y$ pour tout $y \in \mathscr{E}$.

Le graphe représentant une relation d'ordre ne comporte pas d'arc non-orienté (propriété d'antisymétrie) autre que les arcs (x, x) que l'on omet. On pourra, pour simplifier la représentation, omettre les arcs obtenus par transitivité (voir figure 1.2).

Définition 1.8 (Relation de préordre) *Une* relation de préordre $\succeq$ *est une relation binaire réflexive et transitive.*

Une relation de préordre effectue aussi un rangement des éléments de $\mathscr{E}$, mais cette fois-ci les *ex aequo* sont possibles. On définit de la même façon que pour une relation d'ordre la relation de préordre strict $\succ$, ainsi que l'ensemble des éléments non dominés $\max_{\succeq} \mathscr{E}$.

[3]En revanche il peut y avoir des incomparabilités si la relation est incomplète.

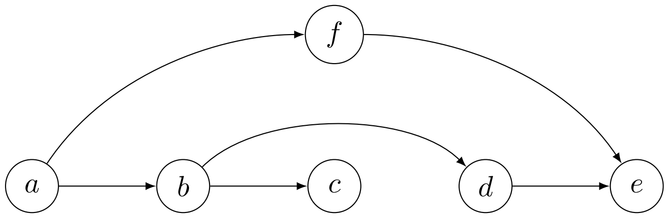


Figure 1.2 — Représentation d'un ordre non complet sous forme d'un graphe : l'ordre représenté est la clôture transitive de $a \geq b \geq c$, $b \geq d \geq e$, $a \geq f \geq e$.

Le graphe représentant une telle relation est constitué de groupes de sommets (*clusters*) formant des cliques non orientées, liés entre eux ou non par des arcs orientés. Pour simplifier la notation, nous représenterons une telle relation binaire de la même manière qu'un ordre, mais en faisant figurer dans les sommets du graphe l'ensemble des éléments de la même classe d'équivalence, ou un représentant de la classe d'équivalence (voir figure 1.3).

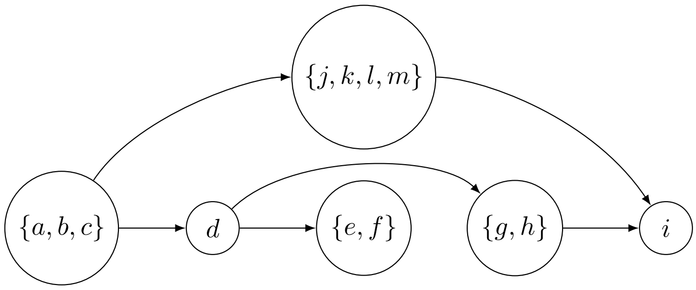


Figure 1.3 — Représentation d'un préordre non complet sous forme d'un graphe : l'ordre représenté est la clôture transitive de $\{a, b, c\} \geq d \geq \{e, f\}$, $d \geq \{g, h\} \geq i$, $\{a, b, c\} \geq \{j, k, l, m\} \geq i$.

1.2.1.2 Structure de préférence ordinale

Le modèle classique (voir [Vincke, 1989] par exemple) de représentation des préférences en théorie de la décision est fondé sur la question suivante : «Étant données deux alternatives x et y, x est-elle au moins aussi bonne que y ?». Répondre à cette question par *oui* ou *non* de manière non ambiguë pour toute paire d'éléments (x, y) revient à définir une relation binaire (supposée, par définition, réflexive) sur l'ensemble des alternatives :

Définition 1.9.a (Structure de préférence ordinale) *Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'alternatives. Une* structure de préférences ordinale *sur $\mathscr{E}$ est une relation binaire réflexive notée $\Re_S$.*

Pour toute paire d'alternatives (x, y) et pour toute structure de préférences ordinale $\Re_S$, nous pouvons être confrontés aux trois situations mutuellement exclusives suivantes :

- ▷ **indifférence :** $x \Re_S y$ et $y \Re_S x$ s'interprète comme «x est indifférent à y» ;
- ▷ **incomparabilité :** non $x \Re_S y$ et non $y \Re_S x$ s'interprète comme «x est incomparable à y» ; il peut s'agir d'un refus de comparer (point de vue éthique) ou d'une incapacité de comparer due à un manque de connaissances (point de vue épistémique) ;
- ▷ **préférence stricte :** $x \Re_S y$ et non $y \Re_S x$ (respectivement $y \Re_S x$ et non $x \Re_S y$) s'interprète comme «x (resp. y) est strictement préféré à y (resp. x)».

Ces trois relations nous fournissent une définition alternative (mais fondamentalement équivalente) pour la notion de structure de préférence ordinale :

Définition 1.9.b (Structure de préférence ordinale) *Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'alternatives. Une* structure de préférences ordinale *sur $\mathscr{E}$ est un triplet $(\Re_P, \Re_I, \Re_R)$ de relations binaires vérifiant :*
- ▷ *$\Re_P$ est asymétrique ;*
- ▷ *$\Re_I$ (relation d'indifférence) est réflexive et symétrique ;*
- ▷ *$\Re_R$ (relation d'incomparabilité) est irréflexive et symétrique ;*
- ▷ *pour toute paire d'alternatives (x, y), on a $x\Re_P y$ ou $y\Re_P x$ ou $x\Re_I y$ ou $x\Re_R y$, cette disjonction étant exclusive.*

On peut obtenir la relation $\Re_S$ à partir du triplet $(\Re_P, \Re_I, \Re_R)$ en posant : $\Re_S = \Re_P \cup \Re_I$. Réciproquement, on a, pour tout couple d'alternatives (x, y) :
- ▷ $x\Re_P y \Leftrightarrow x\Re_S y$ et non $y\Re_S x$ (x est strictement préféré à y si et seulement si x est aussi bon que y mais y n'est pas aussi bon que x),
- ▷ $x\Re_I y \Leftrightarrow x\Re_S y$ et $y\Re_S x$ (x est indifférent à y si et seulement si x est aussi bon que y et y est aussi bon que x),
- ▷ $x\Re_R y \Leftrightarrow$ non $x\Re_S y$ et non $y\Re_S x$ (x et y sont incomparables si et seulement si on ne peut ni dire que x soit aussi bon que y, ni que y soit aussi bon que x).

Un exemple de structure de préférence ordinale «dégénérée» utilisée en intelligence artificielle est la structure de préférence dichotomique. Dans une telle structure, les préférences ne sont données que par un ensemble de bonnes alternatives : toute alternative appartenant à cet ensemble est meilleure que toute alternative n'appartenant pas à cet ensemble, mais les bonnes alternatives sont indifférentes entre elles (de même que les mauvaises).

Définition 1.10 (Structure de préférence dichotomique) *Une* structure de préférence dichotomique *sur un ensemble d'alternatives $\mathscr{E}$ est une structure de préférence ordinale particulière définie par la donnée d'un sous-ensemble d'alternatives $\mathscr{G} \subset \mathscr{E}$. La relation $\Re_S$ est un préordre total défini comme suit : $\forall (x, y) \in \mathscr{E}^2$, $x\Re_S y \Leftrightarrow x \in \mathscr{G}$ ou $y \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{G}$.*

En d'autres termes, une structure de préférence dichotomique s'intéresse à des préférences pouvant être représentées par un préordre total dont la relation d'équivalence associée possède deux classes d'équivalence. La raison de l'intérêt de cette structure de préférence en intelligence artificielle est qu'elle concentre, malgré son aspect assez fruste, toute la complexité computationnelle de langages liés à des modèles de préférences plus évolués. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans le chapitre 3 consacré aux langages de représentation compacte.

1.2.1.3 Extensions de la structure de préférence ordinale

Dans le modèle des structures de préférences, on n'autorise que les réponses *oui* ou *non* à la question «x est-il au moins aussi bon que y ?». Cependant, on pourrait vouloir apporter des précisions à cette réponse, par exemple en incluant des informations sur l'*intensité* de la préférence, ou encore des informations sur la *crédibilité* de la proposition «x est préféré à y», ou modéliser des situations d'hésitation (voir par exemple un modèle de préférences un peu plus général présenté dans [Roy, 1985]). De nombreuses structures de préférences ont été étudiées dans la littérature. Certaines permettent de prendre en compte des seuils d'indifférence, d'autres acceptent l'incomparabilité entre alternatives, d'autres incluent la notion d'incertitude ou d'imprécision.

La première extension classique est la structure de préférence qualitative, qui ajoute une idée d'intensité aux préférences :

Définition 1.11 (Structure de préférence qualitative) *Une structure de préférence* qualitative *sur $\mathscr{E}$ est un couple $(\langle \mathscr{V}, \succeq \rangle, u)$, où $\langle \mathscr{V}, \succeq \rangle$ est une structure de valuation quantitative formée d'un ensemble $\mathscr{V}$ totalement ordonné par $\succeq$, et u est une fonction d'utilité de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{V}$.*

En d'autres termes, une structure de préférence qualitative associe à chaque alternative une valuation. Aucune hypothèse spécifique n'est requise sur l'espace de valuation, mis à part le fait qu'il soit totalement ordonné. Par exemple, cet espace peut être $\mathscr{V} = \{$médiocre, mauvais, moyen, bon, excellent$\}$; un tel espace pourra être muni de la relation d'ordre suivante $\geq$ définie comme suit : médiocre $\leq$ mauvais $\leq$ moyen $\leq$ bon $\leq$ excellent.

Le modèle de représentation des préférences introduit avec la structure de préférence qualitative, s'il est plus riche que la structure de préférence ordinale, est cependant trop pauvre pour effectuer des comparaisons entre les intensités. Pour pallier ce manque d'expressivité, la plupart des travaux s'intéressent à des structures de valuation numériques, qui possèdent une loi de composition interne, permettant notamment d'ajouter les valuations, et surtout de faire leur différence.

Définition 1.12 (Structure de préférence cardinale) *Une structure de préférence* cardinale *sur $\mathscr{E}$ est un couple $(\langle \mathscr{V}, \succeq, \oplus \rangle, u)$, où $(\langle \mathscr{V}, \succeq \rangle, u)$ est une structure de préférence qualitative, et $\oplus$ est une loi de composition interne associative et commutative sur $\mathscr{V}$ ayant les propriétés suivantes :*

- ▷ *monotonie : $\forall a, b, c \in \mathscr{V}$ tels que $a \preceq c$, on a $(a \oplus b) \preceq (c \oplus b)$,*
- ▷ *élément neutre : $\forall a \in \mathscr{V}$, $a \oplus \bot = a$,*
- ▷ *élément absorbant : $\forall a \in E$, $a \oplus \top = \top$,*
- ▷ *existence d'une différence unique : Soit $\alpha \preceq \beta$ alors $\max\{\gamma \mid \alpha \oplus \gamma = \beta\}$ existe et est noté $\beta \ominus \alpha$.*

En d'autres termes, $\oplus$ est une *conorme* pour laquelle la notion de différence est définie, et $\langle \mathscr{V}, \succeq, \oplus \rangle$ est un monoïde commutatif totalement ordonné. Classiquement, on choisit des utilités à valeurs réelles (soit $\mathscr{V} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathscr{V} = \overline{\mathbb{R}}^+$) ou à valeurs entières ($\mathscr{V} = \overline{\mathbb{N}}$), ces espaces de valuation étant munis de l'ordre naturel $\geq$ sur les nombres, et de la loi $+$.

Dans cette définition la fonction u est appelée *fonction d'utilité*. Cette définition de fonction d'utilité est plus générale que celle qui est classiquement introduite dans les ouvrages traitant de la théorie du *welfarisme*[4], qui ne considèrent que des fonctions d'utilités définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$. Notre point de vue s'inspire davantage des formalismes introduits en intelligence artificielle pour la modélisation des préférences au sens large, par exemple dans les problèmes de satisfaction de contraintes valués [Cooper et Schiex, 2004] (notion de structure de valuation *juste*), le cadre PFU [Pralet, 2006], ou les problèmes de partage [Fargier *et al.*, 2004a]. Nous reparlerons de la théorie de l'utilitarisme un peu plus loin dans ce chapitre, et des problèmes de satisfaction de contraintes dans le chapitre 5 consacré à l'algorithmique.

Une question classique posée en théorie de la décision est la question de la représentativité d'une telle structure de préférence en terme de structure de préférence ordinale. En d'autres termes, on cherche quel type d'ordre est représentable par une structure de préférence cardinale. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Soient $\mathscr{E}$ un ensemble d'alternatives fini ou infini dénombrable, et $(\langle \mathbb{R}, \succeq, + \rangle, u)$ une structure de préférence cardinale sur $\mathscr{E}$. Alors il existe une structure de préférence ordinale $\Re_S$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathscr{E}^2$, $x \Re_S y \Leftrightarrow u(x) \succeq u(y)$ si et seulement si $\Re_S$ est un préordre total.*

Si de plus on a $u(x) = u(y) \Leftrightarrow x = y$, alors $\Re_S$ est un ordre total.

On dira que u représente *la relation $\Re_S$.*

Cette proposition, classique en théorie de la décision [Vincke, 1978, 1989; Bouyssou et Vincke, 2006] a été démontrée notamment par Cantor [Cantor, 1915]. Elle permet d'affirmer notamment

[4] Il ne semble pas exister d'équivalent français pour ce terme, dont le sens diffère légèrement de celui de l'utilitarisme. Nous prendrons donc le risque de troubler les puristes de la langue française et emploierons cet anglicisme francisé.

l'existence d'une fonction d'utilité à valeurs réelles pour toute structure de préférence de type préordre ou ordre totaux. Bien entendu, cette représentation numérique n'est pas unique, puisqu'elle est définie à une transformation croissante près. Le problème de construction d'une fonction d'utilité à partir d'une relation de préordre est le problème de *représentation numérique*, classique dans le domaine de la modélisation des préférences.

D'autres modèles plus riches que la structure de préférences cardinale ont été introduits. On citera par exemple :

▷ les modèles à seuil, fondés sur une fonction $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ et une constante $q \geq 0$ appelée «seuil d'indifférence» ;

▷ les modèles à base d'intervalles, fondés sur deux fonctions $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Ces modèles sont nés de l'inadéquation du modèle du préordre à certaines situations courantes pour lesquelles la relation d'indifférence n'est pas forcément transitive. Cette hypothèse de transitivité est criticable dans des contextes où l'on est incapable de discriminer des alternatives proches, mais où l'on sait discriminer des alternatives plus éloignées (l'introduction de cette remarque dans le contexte de la modélisation des préférences est due à [Luce, 1956]). L'exemple classique associé à cette situation est celui du sucre dans une tasse de café. Si l'on désigne par T_i une tasse de café contenant i milligrammes de sucre, il est très probable qu'un agent appréciant un café très sucré ne sera pas indifférent entre T_n et T_o, pour n assez grand, mais ne sera pas à même de faire la différence entre T_i et T_{i+1}. Cela suggère une relation d'indifférence intransitive (car $\forall i \ T_i \Re_I T_{i+1}$, mais non $T_n \Re T_0$).

Ces modèles permettent respectivement de représenter des préférences à base :

▷ de **semi-ordres** (ou quasi-ordres) $\Re_S$: $\forall (x,y) \in \mathscr{E}^2$, $x \Re_S y \Leftrightarrow g(x) \preceq g(y) + q$ (voir par exemple [Vincke, 1978]) ;

▷ d'**ordres d'intervalle** $\Re_S$: $\forall (x,y) \in \mathscr{E}^2$, $x \Re_S y \Leftrightarrow g(x) \preceq g(y) + q(g(y))$ (voir par exemple [Pirlot et Vincke, 1997]).

Nous pouvons noter l'extension récente de ces modèles à base d'intervalles aux intervalles à 3 points (voir par exemple [Öztürk et Tsoukiàs, 2006]) qui permettent aussi de prendre en compte une intransitivité de la relation d'indifférence, mais en utilisant uniquement des informations ordinales (la distance entre les points n'est pas importante).

Nous ne détaillerons pas plus ici l'ensemble de ces structures de semi-ordres ou d'ordres d'intervalle. Nous invitons le lecteur à consulter les quelques références citées pour plus de détails sur le sujet.

Notons enfin l'existence d'un autre type de structure de préférence classique en intelligence artificielle, qui raffine la structure de préférence cardinale : la structure de préférence *floue* [Fodor et Roubens, 1994; Perny et Roy, 1992]. Une telle structure est fondée sur une fonction de *crédibilité* μ, qui à toute paire d'alternatives (x,y) associe un nombre $\mu(x,y) \in [0,1]$, représentant la crédibilité de l'assertion «x est au moins aussi bon que y ».

Concluons cette section sur la modélisation des préférences par un petit résumé des structures de préférence classiques introduites :

▷ Une structure de préférence *dichotomique* est un sous ensemble $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{E}$.

▷ Une structure de préférence *ordinale* est une relation binaire réflexive $\Re_S$.

▷ Une structure de préférence *qualitative* est fondée sur une fonction d'utilité u qui à chaque alternative x associe une valuation $u(x) \in \mathscr{V}$. Les valuations sont comparées grâce à une relation d'ordre sur $\mathscr{V}$.

▷ Une structure de préférence *cardinale* est une structure de préférence qualitative particulière, dans laquelle $\mathscr{V}$ est un monoïde commutatif totalement ordonné.

▷ Une structure de préférence *à seuil* est fondée sur une fonction $g : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ et un seuil

d'indifférence $q \geq 0$. Les alternatives x sont considérées comme indifférentes si la différence entre leurs valuations sont inférieures au seuil q.
- ▷ Une structure de préférence *à base d'intervalles* associe à chaque alternative x un intervalle $[g(x), g(x) + q(g(x))]$. Il s'agit d'une structure de préférence à seuil variable.
- ▷ Une structure de préférence *floue* sur $\mathscr{E}$ est fondée sur une fonction de crédibilité $\mu : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \rightarrow [0, 1]$, qui à toute paire d'alternatives (x, y) associe une mesure de crédibilité $\mu(x, y)$.

1.2.2 L'espace cible des préférences individuelles

Dans de nombreux problèmes de décision, l'espace cible des préférences $\mathscr{E}$ apparaît de manière naturelle. Il s'agit de l'ensemble des alternatives entre lesquelles le choix s'effectue, ou en d'autres termes, de l'ensemble des actions possibles de l'agent décideur. Dans les problèmes de partage, si l'espace cible des préférences collectives est naturellement l'ensemble des allocations[5], on fait souvent une hypothèse simplificatrice en ce qui concerne les préférences individuelles : on suppose dans la plupart des problèmes que la satisfaction d'un agent n'est pas du tout affectée par la part reçue par les autres agents. En d'autres termes, on suppose que l'espace cible des préférences des agents est simplement l'ensemble des parts possibles $\wp(\mathscr{R})$.

De manière générale, on distinguera deux cas de figure :
- ▷ le cas de préférences individuelles non exogènes, dont l'espace cible est simplement l'ensemble des parts, et donc la satisfaction des agents ne dépend pas de la part des autres agents ;
- ▷ le cas de préférences individuelles exogènes, dont l'espace cible est maintenant l'ensemble des partages possibles, et donc la satisfaction des agents dépend de l'ensemble du partage.

On peut classer dans la seconde catégorie l'ensemble des partages qui font intervenir la notion de jalousie ou d'envie directement dans les préférences des agents. Cette modélisation reflète de manière plus réaliste le comportement humain vis-à-vis de la décision collective que ne le fait le modèle rationnel de l'*Homo Œconomicus*. On pourra lire avec profit [Henrich *et al.*, 2001; Zizzo et Oswald, 2000], cités par [Delahaye, 2005], sur le sujet de la non rationalité des préférences humaines : les expériences conduites par les auteurs de ces articles révèlent notamment que dans certains cas, un agent préfère diminuer sa satisfaction personnelle afin de nuire à un agent plus chanceux que lui.

Notons malgré tout que l'hypothèse de non exogénéité des préférences individuelles est une approximation satisfaisante dans la plupart des problèmes concrets étudiés. La notion de jalousie et d'envie pourra, dans ce cadre-là, se traduire par une propriété exigée sur le partage résultant, et non comme une propriété intrinsèque des préférences individuelles. Nous reviendrons sur le sujet dans la section 1.3.1.3 consacrée à l'absence d'envie.

Notons que, lorsque l'espace cible des préférences individuelles est l'ensemble des parts possibles, nous pouvons définir une propriété supplémentaire sur la structure de préférences, la propriété de monotonie :

Définition 1.13 (Monotonie) *Soit $\succeq$ une structure de préférences ordinale sur l'espace des parts possibles $\wp(\mathscr{R})$. Alors $\succeq$ est* monotone *si et seulement si pour tout couple de parts $(\pi, \pi') \in \wp(\mathscr{R}) \times \wp(\mathscr{R})$, $\pi \subseteq \pi' \Rightarrow \pi \preceq \pi'$.*

La propriété de monotonie est intuitive et raisonnable. Pour un agent ayant des préférences monotones, l'ajout d'un peu de ressource (un objet par exemple) dans la part qu'il a ne pourra pas avoir d'effet «négatif». Bien entendu, cela n'est pas toujours le cas (voir par exemple 3.9 dans le chapitre 3), mais on pourra considérer pour les problèmes de partage auxquels on aura affaire que

[5] On peut éventuellement restreindre la définition des préférences collectives à l'ensemble de partages admissibles sans que cela n'ait d'incidence sur la suite.

c'est le cas en première approximation. Si un agent ne veut pas d'un objet, il pourra toujours le donner à un autre agent ou tout simplement le jeter ou l'oublier dans un coin de grenier.

1.3 Agrégation des préférences et partage équitable

Nous avons jusqu'ici posé les bases nécessaires à la modélisation du problème de partage de biens indivisibles. Nous nous retrouvons maintenant face à un problème délicat, qui constitue le cœur du partage : celui de l'agrégation des préférences individuelles. Ce problème peut être posé informellement de la manière suivante :

> Étant donnés un ensemble d'objets et un ensemble d'agents ayant des préférences sur les parts possibles qu'ils peuvent recevoir, comment partager les objets entre les agents, de manière à ce que le partage soit le plus équitable possible ?

Ce problème de *justice distributive*, vieux comme le monde, a été abondamment étudié par les philosophes et les économistes, car il est lié au développement de toute société : du partage de territoires de chasse dans les sociétés primitives au partage des zones d'exploitations minières mondiales, la problématique de la répartition de biens communs est au cœur des interactions et activités collectives humaines. Indissociable de la notion de partage, le concept d'*équité* a été également abondamment étudié dans de nombreux domaines. Comme nous l'avons rappelé en introduction, la notion d'équité ne véhicule pas nécessairement une idée d'éthique ou de morale, contrairement à ce qui semble être d'usage dans le langage courant. Nous nous conformerons à l'acception de [Young, 1994] :

> «By "equitable" I do not necessarily mean ethical or moral, but that which a given society considers to be *appropriate* to the need, status, and contribution of its various members.»

Le problème de justice distributive est historiquement celui des philosophes et des économistes théoriciens. Les premiers ont concentré leur attention sur la signification de concepts aussi abstraits que l'équité ou la justice, alors que les seconds (ainsi que quelques mathématiciens) se sont intéressés à la modélisation et à l'axiomatisation de ces concepts et de propriétés qui leur sont liées. En revanche, peu d'entre eux se sont intéressés à des propriétés liées à la construction ou à l'existence de partages équitables dans certaines conditions bien précises [Brams et Taylor, 1996]. Ce domaine, plus récent, est plutôt l'apanage des sciences politiques, de la sociologie, ou de l'économie appliquée, qui requièrent des approches plus empiriques. Ces travaux ont ouvert la voie à l'extension du domaine du partage — et plus généralement du choix social — à des sciences comme l'informatique ou l'intelligence artificielle, s'intéressant principalement à des aspects liés à la représentation compacte, à l'algorithmique ou à la complexité des problèmes de choix social.

Nous allons présenter ici en quelques pages les fondements théoriques principaux qui sont à la base de la modélisation du problème de partage en économie.

1.3.1 Principes normatifs de la justice distributive

1.3.1.1 Le principe d'équité

Il existe trois grandes théories normatives de la justice distributive. La première d'entre elles, et la plus ancienne, est le principe d'équité d'Aristote :

> «Les contestations et les plaintes naissent quand, étant égales, les personnes possèdent ou se voient attribuer des parts non égales, ou quand, les personnes n'étant pas égales, leurs parts sont égales. [...] Tous les hommes reconnaissent, en effet, que la justice dans

la distribution doit se baser sur un mérite de quelque sorte, bien que tous ne désignent pas le même mérite.»

Aristote, *Éthique à Nicomaque*, Livre V, chapitre 6, traduction Tricot.

Le principe selon lequel les égaux doivent être traités de manière égale prête relativement peu à confusion : si deux personnes sont parfaitement identiques selon toutes les caractéristiques entrant en ligne de compte dans le problème, alors elles doivent être traitées de manière parfaitement égales. En revanche, le principe de traitement inégal des inégaux — de manière proportionnelle à leurs différences — est sujet à de nombreuses interprétations.

Derrière le principe d'équité d'Aristote se cache quatre définitions de la «pertinence» des critères, au cœur de toutes les réflexions d'ordre philosophiques sur la justice distributive [Moulin, 2003].

1. Le principe de *compensation*. L'idée qui est à la base de ce principe est que certains agents ont besoin d'une plus grande quantité de ressources basiques que d'autres agents pour atteindre le même degré de bien-être, et ce à cause d'un certain nombre de différences involontaires et moralement injustifiées (santé, richesse des parents, capacités intellectuelles, ...). Le principe de compensation suggère de donner plus de ressource aux personnes qui en ont le plus besoin : en d'autres termes, on cherche à atteindre l'égalité *ex-post*.
2. Le principe de *récompense*. Dans certains cas, les différences sur les caractéristiques individuelles sont volontaires : les agents peuvent en être tenus pour responsables. Dans ces cas-là, ces différences justifient un traitement inégal des agents et doivent être prises en compte lors de la division de la ressource. Selon ce principe, l'attribution de la ressource se fait en vertu du mérite des agents : plus un individu a contribué à la création de la ressource, plus il doit en bénéficier.
3. Le principe de *droits exogènes*. Certains principes guidant l'allocation de la ressource viennent de considérations complètement extérieures à la consommation de cette ressource et des questions du type *qui en a besoin ?* et *qui la mérite ?* qui lui sont rattachées. L'illustration la plus édifiante de ce principe est le principe d'égalité dans l'allocation des droits politiques : chaque citoyen ayant atteint la majorité a le droit de voter, quels que soient ses mérites, son niveau d'étude ou encore son intérêt pour la politique. Ce principe est celui de l'(in)égalité *ex-ante* (nous reviendrons sur les droits exogènes au chapitre 2).
4. Le principe d'*adéquation* (ou *fitness*). Ce principe peu être résumé en une phrase : *La ressource doit être donnée à la personne qui en fait le meilleur usage*. Il se décline en deux principes : l'adéquation à la somme et l'adéquation à l'efficacité, qui correspondent respectivement à l'utilitarisme classique et au principe d'efficacité de Pareto, dont nous parlerons plus loin.

Outre la critique concernant la difficulté de juger des inégalités entre les individus (comment en effet juger de critères aussi flous que «la contribution de chacun», ou encore «le bon usage de la ressource»), on oppose en général au principe d'Aristote le fait qu'il ne fonctionne parfaitement que si la ressource à partager est divisible [Young, 1994].

1.3.1.2 Le *welfarisme* cardinal

Le *welfarisme* compte parmi les paradigmes dominants actuellement dans le domaine de la micro-économie. Née des travaux initiaux des précurseurs Condorcet et Borda, puis de ceux de Bentham et d'Arrow, cette théorie s'applique de manière générale à tous les problèmes de décision collective (dont les problèmes de partage sont des instances particulières). Elle est fondée sur un postulat de choix rationnel — chaque choix individuel cherche à maximiser une relation de préférence donnée complète —, et sur le principe de l'individualisme méthodologique : l'individu et le monde extérieur (caractérisé par un ensemble d'états, ou en d'autres termes d'alternatives) sont deux entités clairement séparées. L'autorité collective peut agir sur la distribution des ressources, mais pas sur l'individu lui-même, qui a des caractéristiques intrinsèques telles que ses valeurs, préférences, expériences, etc. Le postulat de base de la théorie du *welfarisme* est que chaque agent peut exprimer sa satisfaction vis-à-vis des états du monde sous la forme d'un ordre sur ces états ou d'un indice numérique : le *bien-être social* (*social welfare*). Le *welfarisme* est donc un procédé permettant d'agréger de manière mécanique le bien-être social des agents pour en déduire une décision collective. Ce modèle se divise en deux grands domaines d'étude :

▷ le *welfarisme* ordinal, ou *choix social*, qui s'applique à l'agrégation de relations de préférences ordinales, comme dans le domaine du vote ;
▷ le *welfarisme* cardinal, version quantitative du problème de décision collective, qui axiomatise le principe de l'utilitarisme de Bentham.

On pourra consulter par exemple l'ouvrage de référence [Arrow *et al.*, 2002] afin d'avoir une synthèse détaillée de la théorie du choix social, s'étendant de l'agrégation des préférences ordinales à la théorie de l'utilitarisme.

Utilitarisme classique et égalitarisme Le *welfarisme* cardinal, et *a fortiori* le domaine de la justice distributive, s'appuient historiquement sur deux théories d'importance en économie. La première de ces théories, introduite principalement par Jeremy Bentham (1748–1832) et John Stuart Mill (1806–1873) sous sa forme systématique est celle de l'utilitarisme classique. L'idée fondatrice de cette théorie est qu'il est possible de représenter la satisfaction d'un agent vis-à-vis d'un état par un indice numérique, qui représente formellement la somme des joies et des peines de l'individu en question : l'utilité doit être comprise comme une mesure de satisfaction psychique cardinale qui peut être ajoutée entre les individus. Les biens doivent être répartis de manière à maximiser le bien-être social total des demandeurs (le meilleur bien pour le plus grand nombre). De manière plus formelle, l'utilitarisme cherche à maximiser la somme des utilités individuelles : les incréments d'utilité individuelle de différents agents sont complètement interchangeables. Pour comprendre ce point de vue, il suffit de considérer chaque agent comme un producteur de bien-être social : le but est de maximiser la production totale de bien-être social, sans se préoccuper des inégalités entre les agents.

Deux principales critiques ont été opposées à cette théorie. Tout d'abord, le fait que l'on puisse comparer entre des individus des niveaux de satisfaction correspondant à des états psychiques internes est plus que discutable. La seconde critique concerne le fait que cette théorie peut exiger le sacrifice de quelques-uns pour le bonheur du plus grand nombre : ce principe moral n'est pas universellement accepté.

Ces objections à la théorie de l'utilitarisme classique de Bentham ont donné naissance à la théorie de l'égalitarisme de Rawls [Rawls, 1971]. L'idée fondatrice de cette théorie est qu'une distribution est équitable si le plus malheureux des individus est rendu le plus heureux possible. Pour l'égalitariste pur, les compensations entre agents sont impossibles ; un gain très important d'utilité pour tous les agents sauf un ne compense pas une perte minuscule d'utilité pour ce dernier agent s'il s'avère qu'il est déjà le moins satisfait. Notons que cette idée n'implique pas nécessairement une égalisation des revenus entre les agents, car d'un point de vue économique une telle égalisation n'incite pas à la création de richesse et donc conduit à la diminution de la quantité de biens disponible. Contrairement aux apparences, cette théorie n'est pas une théorie utilitariste dans le sens strict du terme, et en cela, elle répond à la première des deux objections concernant l'utilitarisme classique. En effet, si le niveau de «bonheur» est encore ici mesuré par un indice numérique, cet indice ne fait pas référence à un état psychique interne, mais à des moyens par lesquels on peut assurer le bonheur (revenu, santé, etc.) : les biens primaires.

Les principales critiques opposées à cette théorie sont les suivantes. Tout d'abord, même si le recours à des biens primaires pour la mesure du bien-être d'un agent permet de pallier le problème d'intercomparabilité des préférences, l'introduction de ces biens pose d'autres problèmes : absence de comparaison objective pour certains biens primaires (respect par exemple), ou encore difficulté de déterminer un niveau d'importance relative entre ces biens. En d'autres termes, l'introduction de biens primaires ne résoud pas le problème de comparaison interpersonnelle des préférences, mais ne fait que le reporter un peu plus loin. L'autre critique classique est liée à la définition-même du critère égalitariste : est-il juste d'imposer des restrictions sévères à la grande majorité des individus d'une société afin d'augmenter de manière infime les revenus de l'individu le plus pauvre ?

Bien que le débat entre utilitaristes et égalitariste soit ancien, il s'est illustré vers le milieu du XX^{e} siècle par celui entre deux philosophes sociaux, Rawls [Rawls, 1971], plaidant pour l'égalitarisme, et Harsanyi [Harsanyi, 1955], argumentant en faveur de l'utilitarisme. Les deux visions des choses correspondent à deux interprétations différentes de la *loi d'ignorance* (*Rawlsian veil of ignorance*) : « Si un individu devait rejoindre une société en ignorant tout de la place qu'il occuperait dans cette société, quel principe de décision collective jugerait-il juste pour cette société ?» Là où les égalitaristes considèrent que l'individu a une aversion pour le risque, et craint de se retrouver à la place du plus pauvre, l'individu utilitariste a une attitude bayésienne et cherche à maximiser son utilité espérée.

Macro- contre micro-*welfarisme* Les critiques opposées à la conception utilitariste de la justice distributive sont justifiées dans un contexte macro-*welfariste* [Sen, 1992] : l'idée de représenter la somme des joies et des peines d'un individu (même si l'on passe par l'intermédiaire de biens primaires) est plus que discutable si l'on raisonne de manière globale, pour les raisons que nous avons évoquées ci-avant. En revanche, cette théorie est acceptable dans un contexte micro-économique (micro-*welfariste*), dans le sens où l'on établit une franche séparation entre le problème en cours d'étude et le reste des caractéristiques de l'agent ainsi que les autres individus non concernés. Dans le contexte de problèmes de «micro-allocation», l'interprétation de l'utilité d'un agent ne concerne que le problème en cours, et donc ne fait pas référence à un niveau de contentement global de l'individu.

Ainsi, la théorie du *welfarisme* constitue un outil formel remarquable pour traiter les problèmes de justice distributive localisés que sont en général les problèmes de partage. Appliqué aux problèmes de partage, ce modèle permet d'explorer tout un ensemble de compromis entre le principe de compensation (invoqué par les égalitaristes), et le principe d'adéquation (à la base de l'utilitarisme classique). La question de la manière d'y intégrer le principe de *droits exogènes* sera abordée au chapitre 2. En revanche, le *welfarisme* est complètement inadapté pour l'ensemble des problèmes faisant intervenir le principe de récompense. On peut citer parmi ceux-là les problèmes de partage de coûts ou de surplus entre des agents, concernant les problèmes impliquant des agents ayant contribué à hauteur inégale dans la ressource, sous la forme d'un investissement initial inégal par exemple [Moulin, 2002]. Ces problèmes peuvent être traités à l'aide de modèles tels que celui de la *valeur de Shapley* [Shapley, 1953], introduits initialement dans le contexte de la théorie des jeux de von Neumann et Morgenstern, impliquant la notion de répartition de gains entre plusieurs membres d'une même coalition. Ces modèles permettent de prendre en compte de manière générale le principe de récompense, ou de mérite.

Notons enfin que la théorie du *welfarisme* est une théorie de la justice résultat, ou justice *téléologique* (*endstate justice*). En d'autres termes, on cherche à assurer l'équité du résultat du partage, sans vraiment se soucier de la manière dont ce résultat peut être obtenu[6]. Cette vision

[6] C'est par exemple le principe sur lequel est fondée la notion de discrimination positive.

est inadéquate pour certains types de problèmes de partage pour lesquels l'équité ne peut pas être obtenue. Citons par exemple le cas d'allocation de reins disponibles pour un ensemble de patients en attente de greffe. Le *welfarisme* s'avère impuissant à résoudre ce type de problèmes, car ils nécessitent une équité dans la *procédure* d'allocation, et non dans le résultat final : il ne peuvent être traités par les principes de la justice téléologique, mais ils relèvent de la justice *procédurale*. Les modèles concernant la justice procédurale, fondés sur des notions éthiques et morales liées au hasard, à la priorité ou à l'équité par rotation (lorsque le bien à partager le permet), diffèrent de ceux concernant la justice téléologique, et jusqu'à ce jour aucun modèle n'englobe ces deux aspects très différents de la justice distributive.

1.3.1.3 L'absence d'envie

Les objections philosophiques et conceptuelles opposées aux modèles de l'utilitarisme classique et de l'égalitarisme ont conduit certains économistes à adopter un point de vue entièrement différent. L'un des écueils de ces approches est la comparaison interpersonnelle des utilités : le décideur (qui peut être une entité abstraite représentant la collectivité) doit être capable de comparer lui-même les utilités d'individus dont il ne sait rien par ailleurs. L'idée à la base de l'approche fondée sur l'absence d'envie est que ce sont les agents eux-mêmes qui jugent si leur situation est meilleure que celle des autres. En d'autres termes, un partage est sans-envie si aucun agent estime qu'il est moins heureux avec sa part qu'il ne le serait avec la part d'un autre agent, *selon son propre point de vue*.

La notion d'absence d'envie apparaît pour la première fois dans [Tinbergen, 1953], qui introduit un critère d'équité d'une société fondé sur la notion d'envie. Du point de vue de Tinbergen, une société est équitable si et seulement si aucun des individus qui la composent ne désire échanger sa place avec quelqu'un d'autre : il s'agit d'une vision *forte* de l'absence d'envie. Cette propriété, impossible a obtenir dans le cas général, car elle porte sur tous les critères confondus, a été introduite dans un sens plus faible dans [Foley, 1967]. Dans ce contexte, elle n'est pas appliquée au sens global, mais seulement pour un problème d'allocation particulier, pour lequel un agent compare uniquement sa part avec celle des autres. La différence entre absence d'envie forte et absence d'envie faible est bien entendu très similaire à la distinction entre vision macro-*welfariste* et micro-*welfariste*

La propriété d'absence d'envie est séduisante, car c'est une notion purement ordinale, et qui ne requiert aucune élicitation des préférences des agents sur une échelle numérique commune. En revanche, elle ne s'applique pas toujours. Tout d'abord, elle est incompatible avec toute idée de mérite, contribution, besoin, et plus généralement, elle est incompatible avec toute idée de jugement de valeur, car un tel jugement de valeur est toujours fondé sur la comparaison interpersonnelle des préférences. En outre, ce critère peut être simplement inadapté à un problème pour des raisons plus «mécaniques» que philosophiques :

- ▷ Les préférences des agents peuvent être complètement disjointes. Considérons par exemple l'application 1 concernant la constellation de satellites Pléiades. Dans ce problème, les demandes de chaque agent concernent des zones géographiques différentes. On constate donc *a priori* qu'il ne peut y avoir aucune envie dans ce problème. En fait, les choses sont légèrement plus compliquées ici, car l'impossibilité pour un agent d'en envier un autre est uniquement due à la modélisation du problème, centrée sur les demandes en tant qu'objets indivisibles. Les choses peuvent être différentes si l'on adopte une modélisation fondée sur le partage du temps d'utilisation des satellites.
- ▷ Les préférences des agents peuvent être des ordres complets sur l'ensemble des objets. Considérons par exemple l'application 4 concernant l'allocation de sujets de TREX. Dans ce problème, les agents expriment leurs préférences par classement de l'ensemble des sujets sans *ex-aequo* possible. Puisqu'il y a quasiment autant d'individus que de sujets, un partage sans envie ne

peut exister, sauf s'il est possible de donner à chaque agent le sujet correspondant à son premier choix.

1.3.2 Ordre de bien-être social et fonction d'utilité collective

Notre travail sur les problèmes de partage s'appuie sur les fondements micro-économiques du *welfarisme* et de l'absence d'envie, qui constituent des approches tout-à-fait pertinentes pour traiter les problèmes à portée limitée auxquels nous nous intéressons. Nous allons donc maintenant présenter les notions théoriques qui sont à la base de ces modèles.

Le *welfarisme* idéalise un problème de décision collective en attachant à chaque alternative faisable $x \in \mathscr{E}$ (chaque décision possible, ou encore chaque partage admissible) le vecteur $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathscr{V}^n$ des niveaux d'utilité individuelle (par la suite $\mathscr{V}$ sera $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou encore $\mathbb{R}$, munis de la relation d'ordre habituelle $\geq$), où u_i est l'utilité de l'agent i ($u_i = f_i(x)$, si f_i est la fonction d'utilité de l'agent i). Toute l'information pertinente est donc contenue dans l'ensemble des vecteurs d'utilité faisables. Ces utilités individuelles sont agrégées en une structure de préférence ordinale collective grâce à l'*ordre de bien-être collectif*.

Définition 1.14 (Ordre de bien-être collectif) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents et $\mathscr{V}$ un espace de valuations. Un* ordre de bien-être collectif *(ou* ordre de bien-être social[7]*) est un préordre $\succeq$ sur $\mathscr{V}^{|\mathscr{N}|}$.*

La notion d'ordre de bien-être collectif est intuitive : chaque agent i possédant une fonction d'utilité f_i de l'espace des alternatives dans $\mathscr{V}$, on peut associer à chaque alternative x un vecteur d'utilités $(u_1, \ldots, u_n) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Le rôle de l'ordre de bien-être collectif est de classer les alternatives par le biais de leur vecteur d'utilités associé.

À l'instar de la structure de préférence ordinale, l'ordre de bien-être social possède un équivalent numérique, sous la forme des *fonctions d'utilité collective*.

Définition 1.15 (Fonction d'utilité collective) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents et $\mathscr{V}$ un espace de valuations. Une* fonction d'utilité collective *est une fonction de $\mathscr{V}^{|\mathscr{N}|}$ dans $\mathscr{V}$.*

Comme pour la représentation numérique de structures d'utilité cardinale, à toute fonction d'utilité collective g est associée un ordre de bien-être social unique $\succeq$ défini comme suit : $\overrightarrow{u} \succeq \overrightarrow{v} \Leftrightarrow g(\overrightarrow{u}) \succeq g(\overrightarrow{v})$. On dit que g représente $\succeq$. De manière évidente, si g représente $\succeq$, pour toute fonction τ croissante, $\tau(g)$ représente aussi $\succeq$.

Nous nous devons de relever l'analogie formelle existant entre le cadre *welfariste* de la décision collective et celui de la décision multicritère, dans lequel la fonction d'utilité collective a un équivalent prenant la forme d'un *opérateur d'agrégation multicritère* [Marichal, 1999] :

Définition 1.16 (Opérateur d'agrégation) *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux intervalles de $\mathbb{R}$. Un* opérateur d'agrégation *est une fonction $g_{agg} : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{F}$.*

Dans notre cas, les critères sont les fonctions d'utilité des agents, et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont les espaces (non nécessairement bornés) de valuation. Cette analogie est intéressante d'un point de vue mathématique et informatique, car le domaine de la décision multicritère est historiquement lié au développement de sciences comme la recherche opérationnelle, ou la théorie de la décision. Nous pouvons donc bénéficier des nombreuses avancées dans ces domaines pour l'étude des problèmes de partage. Notons

[7]Par la suite, nous emploierons les deux expressions de manière interchangeable.

toutefois que l'analogie entre décision collective et décision multicritère se limite au point de vue formel, et en particulier toute la réflexion philosophique et éthique à la base de la décision collective est absente de la décision multicritère. On se gardera bien par exemple d'interpréter l'opérateur d'agrégation de critères min en termes autres que celui de l'équilibre entre les critères, et on pourra remarquer aussi que des propriétés telles que l'absence d'envie sont complètement absentes du domaine de la décision multicritère.

Notons, pour clore cette introduction des éléments de base du modèle, l'existence d'un cadre généralisant légèrement celui du *welfarisme* et des ordres de bien-être social : le cadre de la négociation collective (*axiomatic bargaining*, voir par exemple [Moulin, 1988, chapitre 3]). Ce modèle introduit par Nash dans [Nash, 1950], généralise la notion d'ordre de bien-être collectif en introduisant les *fonctions de choix social*. Alors que dans le modèle classique, il est possible de comparer directement deux profils d'utilité sans aucune autre donnée, dans ce nouveau modèle, la comparaison entre deux profils dépend en plus de l'ensemble des alternatives faisables. En fait, l'élément-clef de cette construction est la donnée d'une fonction de choix social qui associe à tout ensemble possible de vecteurs d'utilité admissibles un élément de cet ensemble. Un exemple remarquable de fonction de choix social est la fonction d'*égalitarisme relatif* de Kalai-Smorodinski [Kalai et Smorodinsky, 1975], dont nous reparlerons brièvement lorsque nous aborderons la question de la normalisation des utilités dans la section 1.3.4.5.

1.3.3 Propriétés des ordres de bien-être collectif et des partages optimaux

Le choix de l'ordre de bien-être social ou de la fonction d'utilité détermine le contenu éthique et moral associé à la prise de décision, et implique donc le choix crucial du type de société désiré par les agents. L'introduction d'un ensemble de propriétés associées aux ordres de bien-être collectif et aux décisions optimales impliquées par le choix d'un ordre de bien-être social permet d'aider le décideur à faire son choix parmi les ordres de bien-être collectif classiques.

1.3.3.1 Propriétés basiques

Deux propriétés des ordres collectifs sont généralement requises : l'unanimité et l'anonymat.

Définition 1.17 (Unanimité) *Soit $\succeq$ un ordre de bien-être collectif. $\succeq$ satisfait la propriété d'*unanimité *si et seulement si $\forall (u, v) \in \mathscr{V}^n \times \mathscr{V}^n$, si $\forall i \in \mathscr{N}$, $u_i \geq v_i$ et $\exists j \in \mathscr{N}$ tel que $u_j > v_j$, alors $u \succ v$.*

La propriété d'unanimité est intuitive et souhaitable. Si une alternative est au moins aussi bonne qu'une autre pour l'ensemble des agents et qu'elle est strictement préférée pour au moins un agent, alors elle doit être mieux classée que la première par l'ordre collectif. Le principe d'unanimité est le concept le plus important de la micro-économie. Il ne dépend d'ailleurs pas de la structure de préférences, puisqu'il ne nécessite pas de comparaison interpersonnelle cardinale des préférences. Une autre manière de formuler ce principe est de dire qu'il est compatible avec la relation de dominance de Pareto, c'est-à-dire que u Pareto-domine v si et seulement si $u \succ v$:

Définition 1.18 (Dominance de Pareto, Pareto-efficacité) *Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'alternatives, $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents et $(f_1, \ldots, f_n)$ l'ensemble de leurs fonctions d'utilité. Soit $(x, y) \in \mathscr{E}^2$. Si $\forall i \in \mathscr{N}$, $f_i(x) \geq f_i(y)$ et $\exists j \in \mathscr{N}$ tel que $f_j(x) > f_j(y)$, alors x* Pareto-domine *y.*

Une alternative non Pareto-dominée est dite Pareto-efficace.

Dans la plupart des problèmes de décision collective, on souhaite l'égalité des agents devant la procédure de choix, dans le sens où si l'on échange l'identité de deux agents sans changer leurs préférences, le classement résultant des alternatives ne doit pas changer. Cela est garanti par la propriété d'*anonymat* :

Définition 1.19 (Anonymat) *Soit $\succeq$ un ordre de bien-être collectif. $\succeq$ satisfait la propriété d'*anonymat *si et seulement si $\forall \overrightarrow{u} \in \mathscr{V}^n$, σ permutation de $\mathscr{N}$, et $\overrightarrow{v} \in \mathscr{V}^n$ tel que $\overrightarrow{v} = (u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)})$, on a $\overrightarrow{u} \sim \overrightarrow{v}$.*

Comme pour la propriété d'unanimité, cette propriété d'anonymat est purement ordinale, donc elle est définie quelque soit la structure de préférences employée par les agents. Notons que cette propriété est souvent vue comme la plus fondamentale des propriétés liées à l'équité : elle empêche la discrimination des agents sur des caractéristiques *a priori* hors du cadre du problème de décision en cours.

Nous introduisons enfin une dernière propriété, qui est la clef de la rationalité *welfariste* [Moulin, 2003] : l'indépendance vis-à-vis des agents non concernés (IUA pour *Independance of Unconcerned Agents*) :

Définition 1.20 (Indépendance vis-à-vis des agents non concernés (IUA)) *Soit $\succeq$ un ordre de bien-être collectif. $\succeq$ satisfait la propriété d'*indépendance vis-à-vis des agents non concernés *si et seulement si pour tout quadruplet de profils d'utilité $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ tel que :*
- ▷ *pour un agent i : $u_i = v_i$ et $u'_i = v'_i$,*
- ▷ *pour tout agent $k \neq i$: $u_k = u'_k$, $v_k = v'_k$,*

nous avons : $\overrightarrow{u} \preceq \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}' \preceq \overrightarrow{v}'$.

En d'autres termes, tout agent i indifférent vis-à-vis du choix entre deux profils $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ — car son utilité reste la même entre les deux profils — peut être ignoré. Si cette propriété n'est pas respectée, le choix entre deux profils d'utilité va dépendre d'agents qui sont réellement indifférents entre les deux profils, ce qui n'est pas souhaitable. Cette propriété est aussi appelée propriété de «séparabilité». Comme nous le verrons, les seuls ordres de bien-être collectif «continus» respectant ce principe seront les ordres représentés par une fonction d'utilité additive.

1.3.3.2 Partage et équité

Les deux propriétés précédentes sont en général exigées dans n'importe quel type de problème de décision collective. Les définitions que nous allons introduire maintenant sont issues de l'abondante littérature sur l'équité dans le partage et la décision collective. Bien entendu, comme nous l'avons rappelé précédemment, l'équité est un principe flou faisant référence à ce qu'une société juge approprié aux besoins, statuts et contributions de ses membres. Néanmoins, plusieurs critères ont été proposés.

Propriétés relatives au partage Les deux propriétés que nous allons introduire ici sont spécifiques au partage, et ne s'appliquent donc pas de manière générale à des problèmes de décision collective autres issus d'autres domaines que la justice distributive.

La première traduction historique du principe d'équité dans les problèmes de partage est fondée sur l'idée que chaque agent considère «l'utilité qui lui est due» comme étant le $n^{\text{ème}}$ de l'utilité qu'il aurait obtenu s'il était seul. Cette idée apparaît dans [Brams et Taylor, 1996] sous le nom de *proportionnalité*, et dans [Moulin, 1995] sous le nom de *juste part garantie*.

Définition 1.21 (Test de juste part) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\mathscr{A}$ l'ensemble des partages admissibles et $\overrightarrow{\pi}$ un partage. $\overrightarrow{\pi}$ satisfait le* test de juste part *(fair share en Anglais) si et seulement si $\forall i,\ f_i(\pi_i) \geq \frac{1}{n}\widehat{u_i}$, avec $\widehat{u_i} \overset{def}{=} \max\{f_i(\pi_i) \mid \overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A}\}$.*

Il semble assez souhaitable de faire en sorte que l'ordre de bien-être social utilisé fournisse un partage optimale garantissant la juste part aux agents. Cependant, lorsque la ressource à partager est indivisible et qu'aucune compensation monétaire n'est possible entre les agents, il peut n'exister aucun partage admissible satisfaisant le test de juste part [Brams et Taylor, 1996]. Cela se traduit par une propriété souhaitable des ordres de bien-être social, proposée dans [Fargier *et al.*, 2004a; Bouveret *et al.*, 2005b], qui stipule qu'un ordre de bien-être social doit fournir une solution qui satisfait le test de juste part s'il en existe une :

Définition 1.22 (Juste part garantie) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\mathscr{A}$ l'ensemble des partages admissibles, $\succeq$ un ordre de bien-être collectif et $\widehat{\mathscr{A}}$ l'ensemble des solutions non dominées pour cet ordre collectif. Soit $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A} \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(\pi_i) \geq \frac{1}{n}\widehat{u_i}\}$. $\succeq$ vérifie la propriété de* juste part garantie *si et seulement si $\mathscr{F} \neq \varnothing \Rightarrow \widehat{\mathscr{A}} \cap \mathscr{F} \neq \varnothing$.*

Cette propriété est donc fondée sur ce à quoi chaque agent estime personnellement avoir droit, sans tenir compte de ce que reçoivent les autres agents.

L'autre vision classique et séduisante de l'équité dans les problèmes de partage est fondée sur la comparaison personnelle (interne à chaque agent) de la propre part d'un agent et de la part des autres agents : il s'agit de l'absence d'envie, que nous avons présentée précédemment. La définition de l'envie, formalisée dans [Foley, 1967], est simple : un agent envie un autre s'il serait plus heureux d'avoir la part de l'autre agent que d'avoir sa propre part.

Définition 1.23 (Test d'absence d'envie) *Soit $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ l'ensemble de leurs fonctions d'utilités exprimées sur les parts et $\overrightarrow{\pi}$ un partage. $\overrightarrow{\pi}$ satisfait le* test d'absence d'envie *si et seulement si $\forall i \neq j,\ f_i(\pi_i) \geq f_i(\pi_j)$.*

Un partage satisfaisant le test d'absence d'envie est dit sans envie.

Bien entendu, comme nous allons le voir à la section 4.1 du chapitre 4, le critère d'absence d'envie seul n'est pas suffisant, car il existe toujours un partage sans envie : le partage qui ne donne rien à personne est sans envie. Les choses se compliquent lorsque l'on ajoute un critère d'*efficacité* à l'absence d'envie : par exemple si l'on requiert que le partage soit complet (attribue l'intégralité de la ressource), ou soit Pareto-efficace.

Dans le cas du partage de biens divisibles, ou dans le cas où les compensations monétaires sont possibles, il existe toujours un partage complet et sans envie, et il existe des procédures pour le trouver dans certains cas (voir [Brams et Taylor, 1996]), par exemple sous réserve de certaines hypothèses sur les fonctions d'utilité des agents, comme pour la procédure de Knaster, ou sur le nombre d'agents en jeu, comme pour la procédure *Adjusted Winner* (dans le cas de deux agents). Quant à l'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie, elle est garantie dans le cas indivisible avec compensation monétaires si les fonctions d'utilité individuelle des agents ont une certaine forme (par exemple si elles sont superadditives [Alkan *et al.*, 1991]). Dans le cas du partage de biens indivisibles sans compensation monétaire, il n'existe pas toujours de partage efficace et sans envie, et comme nous allons le montrer au chapitre 4, et la seule tâche de démontrer l'existence d'un partage sans envie et efficace peut s'avérer extrêmement complexe.

Exemple 1.1 Soit le partage à 2 objets o_1 et o_2 et 2 agents 1 et 2. Les préférences des agents sont les suivantes : 1 et 2 ont les mêmes préférences et valuent $\varnothing$ à 0, $\{o_1\}$ à 5, $\{o_2\}$ à 6 et $\{o_1, o_2\}$ à 10. Alors :

▷ Le partage $(\varnothing, \{o_1, o_2\})$ n'est pas sans-envie (1 envie 2),
▷ Le partage $(\{o_1\}, \{o_2\})$ n'est pas sans-envie (1 envie 2),
▷ Le partage $(\{o_2\}, \{o_1\})$ n'est pas sans-envie (2 envie 1),
▷ Le partage $(\{o_1, o_2\}, \varnothing)$ n'est pas sans-envie (2 envie 1).

Dans cet exemple, il n'existe aucun partage complet sans-envie. En revanche, si les compensations monétaires sont possibles, dans tous les partages, l'agent bénéficiaire de la plus grande part peut reverser la moitié de son utilité sous forme d'argent à l'agent lésé, produisant ainsi des partages sans envie.

Équité fondée sur l'égalitarisme et mesures d'inégalité Les traductions de l'équité introduites jusqu'ici sont d'une part spécifiques au partage, et d'autre part ne requièrent par de comparaison interpersonnelle des utilités, ce qui leur confère un intérêt particulier. En revanche, ces critères ne tirent pas réellement partie des hypothèses très fortes à la base du *welfarisme* cardinal, et liées au fait que les préférences des agents sont exprimées sur une échelle numérique.

Une traduction très largement acceptée de la notion d'équité dans la micro-économie est fondée sur l'égalitarisme. La notion d'équité est traduite par l'aspiration à tendre vers une égalité parfaite des utilités individuelles, si tant est que les agents ont des droits égaux sur la ressource et que les utilités sont commensurables, c'est-à-dire exprimées sur des échelles identiques (monétaires par exemple). Dans ce cadre, on peut déterminer de manière précise à quel point un partage est inéquitable, en mesurant la «distance» du profil d'utilité en question au profil d'utilité parfaitement égalitaire. Cette traduction de la notion d'équité a donné naissance, notamment sous l'impulsion de [Atkinson, 1970], à une branche très prolifique de la micro-économie : celle de la mesure des inégalités. De manière intéressante, le domaine de la mesure des inégalités n'est pas exclusivement réservé à la décision collective, mais il est aussi abondamment étudié dans le contexte de la décision multicritère [Keeney et Raiffa, 1976], car de nombreux problèmes nécessitent la recherche d'un certain équilibre entre différents critères, et les mêmes outils formels s'appliquent dans ce cas-là. En outre, la notion d'inégalité est aussi formellement très proche de la notion de risque dans le domaine de la prise de décision en présence de risque. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point particulier dans le chapitre 2.

L'équité égalitariste et la mesure des inégalités sont fondées sur la propriété de réduction des inégalités. Cette propriété caractérise l'incitation à l'équité d'un ordre de bien-être collectif par sa tendance à redistribuer les utilités des agents les plus riches vers les agents les plus pauvres. Cette notion s'appuie sur la définition d'un *transfert de Pigou-Dalton* :

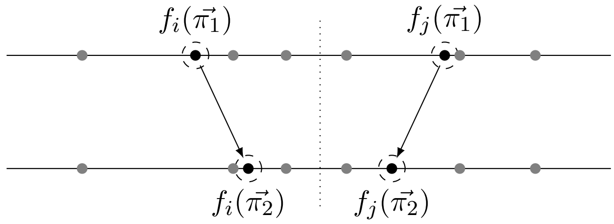
Définition 1.24 (Transfert de Pigou-Dalton (réduction des inégalités)) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux profils d'utilité. $\overrightarrow{u}'$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{u}$ par* réduction des inégalités*, ou* transfert de Pigou-Dalton *si et seulement si $\exists (i,j) \in \mathcal{N}^2$ tels que :*
▷ *$i \neq j$;*
▷ *$\overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{u_i}' + \overrightarrow{u_j}'$ (conservation de la somme) ;*
▷ *$u_i < \{u'_i, u'_j\} < u_j$ (réduction des inégalités) ;*
▷ *$\forall k \in \mathcal{N} \setminus \{i,j\}$, $u_k = u'_k$.*

En d'autres termes, un transfert de Pigou-Dalton redistribue l'utilité d'un agent riche j vers un agent i (tout en maintenant l'utilité globale constante), sans modifier l'utilité des autres agents. À partir de cette notion, on peut caractériser la tendance qu'a un ordre de bien-être social à favoriser l'équité, en introduisant la propriété suivante :

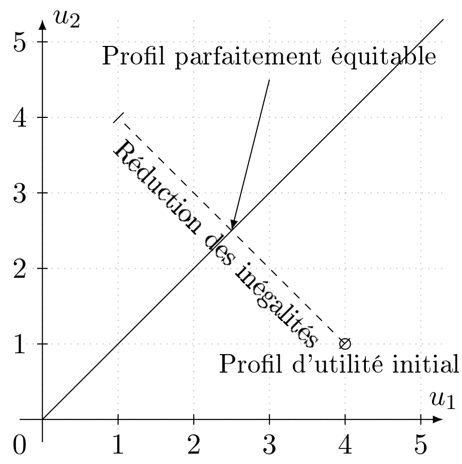
Définition 1.25 (Principe de réduction des inégalités) *Soit $\succeq$ un ordre de bien-être collectif. $\succeq$ satisfait le* principe de réduction des inégalités *si et seulement si pour toute paire de profils d'utilité*

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ *tels que* $\overrightarrow{u}'$ *est obtenu à partir de* $\overrightarrow{u}$ *par transfert de Pigou-Dalton, on a* $\overrightarrow{u} \prec \overrightarrow{u}'$.

Ce principe est aussi appelé *principe de Pigou-Dalton* dans la littérature (voir par exemple [Moulin, 1988, page 45] ou [d'Aspremont et Gevers, 2002, page 506]). Si la préférence pour le second partage est large, l'ordre collectif respecte *faiblement* le principe de réduction des inégalités. La notion de transfert de Pigou-Dalton est illustrée sur la figure 1.4.



▲ Réduction des inégalités entre deux profils d'utilité.



Situation des profils moins inégalitaires pour deux agents. ▶

Figure 1.4 — Illustration du principe de réduction des inégalités de Pigou-Dalton.

La notion de réduction des inégalités seule est en général insuffisante pour caractériser l'ensemble des décisions collectives «intéressantes», car elle n'implique pas en particulier que la décision collective soit Pareto-optimale. Cependant, il existe un outil très intéressant, la courbe de Lorenz, qui fournit une relation de dominance entre profils d'utilité permettant de prendre en compte à la fois la notion de Pareto-efficacité et la réduction des inégalités :

Définition 1.26 (Courbe de Lorenz) *Soit* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur d'utilités et* $\overrightarrow{u}^{\uparrow}$ *le vecteur des composantes ordonnées par ordre non décroissant de* $\overrightarrow{u}$ *(on notera* $u_k^{\uparrow}$ *la* $k^{\text{ème}}$ *composante de ce vecteur). Alors la* courbe de Lorenz *de* $\overrightarrow{u}$ *est le vecteur* $\overrightarrow{L(\overrightarrow{u})} = (u_1^{\uparrow}, \ldots, \sum_{k=1}^{i} u_k^{\uparrow}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} u_k^{\uparrow})$.

La courbe de Lorenz d'un profil d'utilité est donc définie comme le vecteur qui à tout indice i comporte la somme de toutes les utilités des i agents les moins satisfaits. Cet outil, transposé à l'échelle d'une population et appliqué au vecteur des revenus des individus, est utilisé en économie pour mesurer le taux d'inégalité au sein d'une population. Par exemple, la composante de la courbe de Lorenz correspondant à 30% de la taille de la population représente la somme des revenus des 30% des individus qui sont les plus pauvres de la population. Cet outil a l'avantage d'être illustratif du point de vue graphique : la représentation graphique d'une courbe de Lorenz est toujours «convexe» (voir figure 1.6), et son degré de convexité indique l'inégalité au sein de la population. Si tous les agents sont complètement égaux, la courbe est linéaire, et à l'extrême si tous les agents sauf un ont une utilité nulle, la courbe est la plus éloignée possible d'une droite. Notons que le vecteur correspondant à notre définition de la courbe de Lorenz est parfois appelée *courbe de Lorenz généralisée*, la courbe de Lorenz étant définie dans ce contexte comme la normalisation de la courbe de Lorenz généralisée (c'est-à-dire correspondant au vecteur introduit dans la définition 1.26 dans lequel chaque composante a été divisée par la somme totale des utilités).

Comme nous l'avons fait remarquer, la notion de courbe de Lorenz concentre dans un seul critère la Pareto-efficacité et la réduction des inégalités :

Proposition 1.2 ([Moulin, 1988]) *On dira qu'un vecteur d'utilités* $\overrightarrow{u}$ Lorenz-domine *un vecteur d'utilités* $\overrightarrow{v}$ *si sa courbe de Lorenz* $\overrightarrow{L(\overrightarrow{u})}$ *Pareto-domine* $\overrightarrow{L(\overrightarrow{v})}$*.*

Si $\overrightarrow{u}$ *Pareto-domine* $\overrightarrow{v}$ *ou bien est obtenu par transfert de Pigou-Dalton à partir de* $\overrightarrow{v}$*, alors* $\overrightarrow{u}$ *Lorenz-domine* $\overrightarrow{v}$*. Réciproquement, si* $\overrightarrow{u}$ *Lorenz-domine* $\overrightarrow{v}$*, alors il existe une suite de transferts de Pigou-Dalton et d'améliorations de Pareto qui transforme* $\overrightarrow{v}$ *en* $\overrightarrow{u}$*.*

En conséquence, un ordre collectif respecte le principe de réduction des inégalités s'il est compatible avec la dominance de Lorenz. L'ensemble des partages non dominés au sens de Lorenz (Lorenz-optimaux) est le sous-ensemble «le plus égalitaire au sens de Pigou-Dalton» de l'ensemble des partages Pareto-optimaux. La figure 1.5 illustre la notion de dominance de Lorenz sur un ensemble de profils d'utilité pour un problème à deux agents.

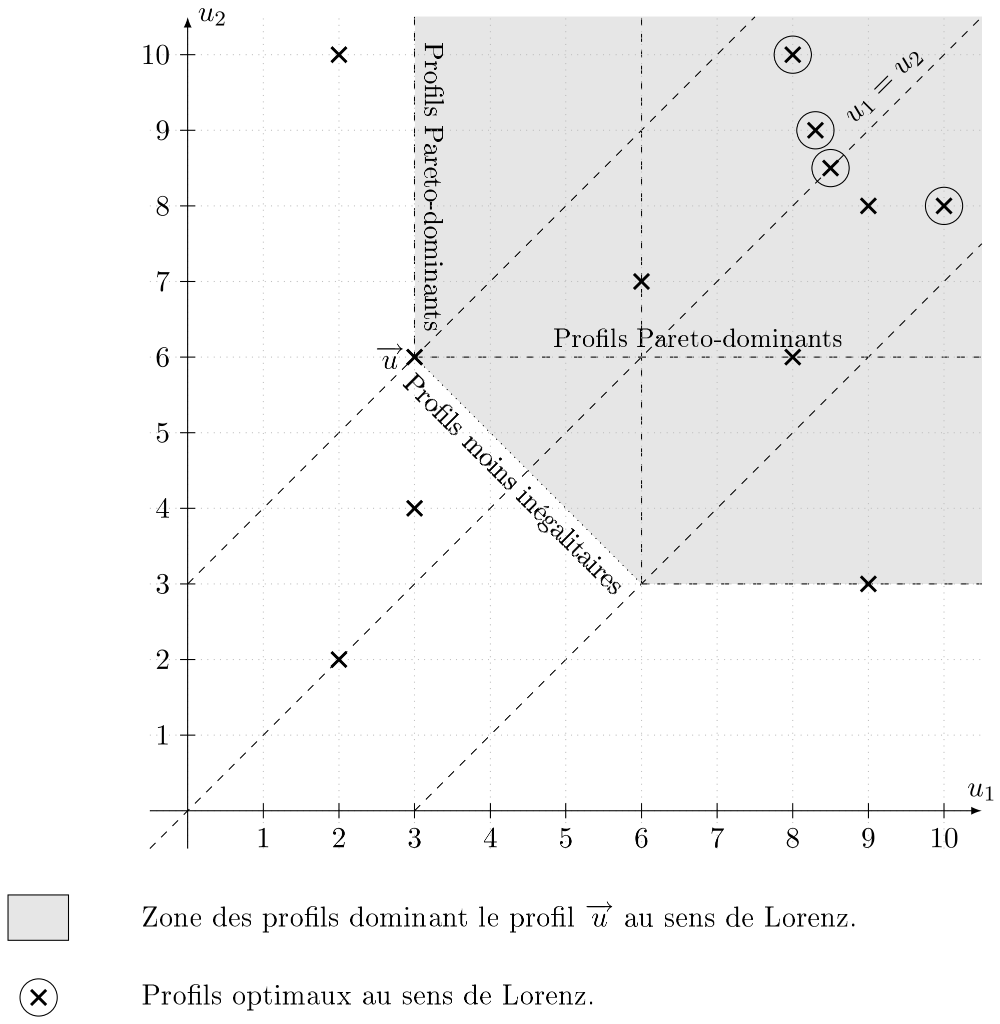


Figure 1.5 — Illustration de la notion de dominance de Lorenz sur des profils d'utilité à deux composantes.

Indices d'inégalité Si les outils fournis par le test de réduction des inégalité et la courbe de Lorenz formalisent la notion d'inégalité, ils n'indiquent pas comment celle-ci doit être mesurée concrètement. Plusieurs mesures numériques ont été proposées, sous la forme d'*indices d'inégalité*. Un indice d'inégalité est une transformation mathématique d'une fonction d'utilité collective qui met en valeur la perte de bien-être social due à l'inégalité entre agents. [Moulin, 1988] propose une bonne introduction aux indices d'inégalité.

Définition 1.27 (Indice d'inégalité) *Soit $\succeq$ un ordre de bien-être collectif qui respecte le principe de réduction des inégalités. Pour chaque vecteur d'utilité positif $\overrightarrow{u}$ on définit l'utilité également distribuée équivalente $\varepsilon(\overrightarrow{u}) \in \mathscr{V}$ de la manière suivante : $\varepsilon(\overrightarrow{u}) \cdot (1, \ldots, 1) \sim \overrightarrow{u}$. On note également $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$. L'*indice d'inégalité *associé à $\succeq$ est :*

$$J(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{\varepsilon(\overrightarrow{u})}{\overline{u}}.$$

On peut remarquer que $J(\overrightarrow{u})$ est toujours strictement positif, sauf lorsque toutes les composantes de $\overrightarrow{u}$ sont égales, auquel cas il est nul. La positivité est due au fait que $\succeq$ respecte le principe de réduction des inégalités. En outre, $J(\overrightarrow{u}) \leq 1$.

Concrètement, un indice d'inégalité est donc fondé sur la mesure d'une «distance» entre un profil d'utilité et le profil «parfait» (c'est-à-dire parfaitement égalitaire) qui lui est équivalent selon l'ordre de bien-être social choisi pour la construction de l'indice. Selon la définition de la fonction d'utilité collective ou de l'ordre collectif choisis au départ, on aboutit à des indices d'inégalité très différents. On peut citer les deux exemples les plus classiques : les indices d'Atkinson et l'indice de Gini.

La famille d'indices d'Atkinson est fondée sur la famille de fonctions d'utilité collective somme des puissances que nous introduirons dans la section 1.3.4, restreinte aux fonctions qui respectent le principe de réduction des inégalités.

Définition 1.28 (Indices d'Atkinson) *La famille d'indices d'Atkinson est la famille définie par :*

$$\begin{cases} J_q(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{u_i}{\overline{u}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < 1 \text{ } ou \text{ } q < 0 \\ J_0(\overrightarrow{u}) = 1 - \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\dfrac{u_i}{\overline{u}}\right)^{\frac{1}{n}}. & \end{cases}$$

L'indice de Gini, quant à lui, n'est pas fondé sur une fonction d'utilité collective classique, mais sur la mesure de la distance de la courbe de Lorenz d'un vecteur d'utilités à sa courbe idéale (c'est-à-dire la droite $k \mapsto k\overline{u}$). Plus le vecteur d'utilités est inégalitaire, plus cette «distance» sera grande. L'indice de Gini mesure l'aire de la surface comprise entre la courbe de Lorenz réelle et idéale (aire grisée sur la figure 1.6).

Définition 1.29 (Indice de Gini) *L'indice d'inégalité de Gini se définit par les trois expressions équivalentes suivantes :*

$$G(\overrightarrow{u}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\overline{u} - L(\overrightarrow{u})_k)}{\displaystyle\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} u_i} = 1 - \frac{1}{n^2\overline{u}}\left(\sum_{k=1}^{n}(2(n-k)+1)u_k^{\uparrow}\right) = \frac{1}{2n^2\overline{u}}\sum_{1 \leq i,j \leq n}|u_i - u_j|.$$

Les trois définitions équivalentes de l'indice de Gini suggèrent trois interprétations.

1. La première définition correspond au calcul normalisé de l'aire décrite ci-avant, et grisée sur la figure 1.6.

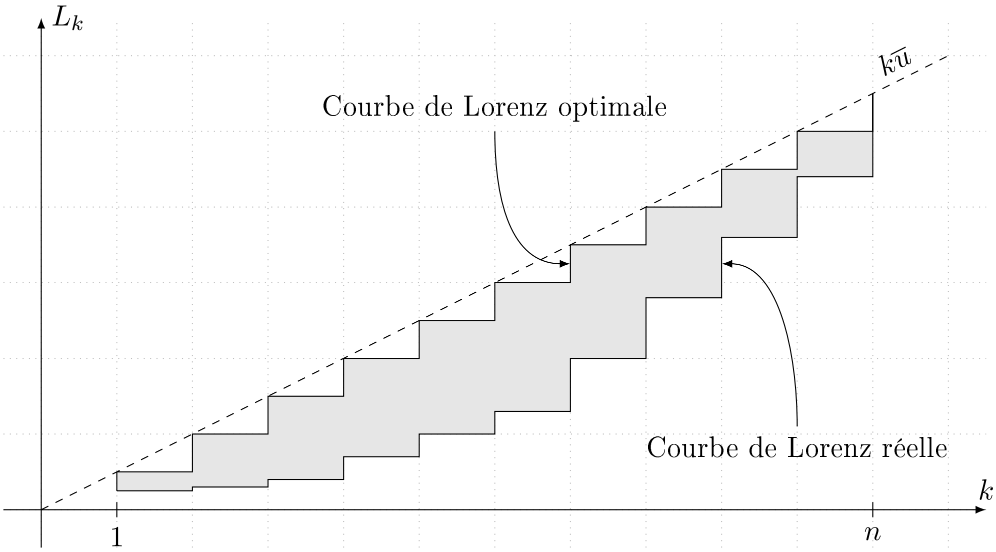


Figure 1.6 — Indice de Gini : distance entre les courbes de Lorenz réelle et idéale.

2. La deuxième définition fait apparaître la fonction d'utilité collective sur laquelle est construite l'indice de Gini. Cette fonction est une variante de la fonction d'utilité utilitariste (voir section 1.3.4) dans laquelle le poids d'un agent décroît en fonction de son degré de satisfaction par rapport aux autres (en fait, c'est une moyenne pondérée ordonnée, voir même section).
3. La troisième interprétation est fondée sur les utilités différentielles : l'indice de Gini est la moyenne des différences d'utilités deux-à-deux entre agents.

1.3.3.3 Résumé de l'ensemble des propriétés

Nous avons introduit un certain nombre de propriétés permettant de caractériser les partages (ou décisions collectives), et les ordres de bien-être social. La plupart de ces propriétés sont liées à la définition de l'équité, selon plusieurs points de vue différents. Un récapitulatif de l'ensemble de ces propriétés est proposé dans le tableau 1.1.

Propriété de l'ordre de bien-être collectif	Propriété du partage	Spécifique au partage ?	comparaison interpersonnelle des préférences ?	Critère d'équité ?
Unanimité	Pareto-efficacité	non	non	non
Anonymat	(—)	non	non	oui/non*
IUA	(—)	non	non	oui/non*
Juste part garantie	Test de juste part	oui	non	oui
(—)	Absence d'envie	oui	non	oui
Réduction des inégalités	Lorenz-efficacité	non	oui	oui
Indice d'inégalité	(—)	non	oui	oui

* Selon les points de vue, il peut s'agir ou non d'un critère d'équité.

Tableau 1.1 — Récapitulatif des propriétés des ordres collectifs et des partages

1.3.4 Fonctions d'utilité collective classiques

Nous allons introduire dans cette section l'ensemble des fonctions d'utilité collective les plus classiques, que nous analyserons brièvement à la lumière des propriétés précédentes.

1.3.4.1 Fonction d'utilité collective utilitariste classique

Les deux fonctions d'utilité collective à la base de toute l'analyse micro-économique correspondent aux deux visions contradictoires présentées ci-avant : la théorie de l'utilitarisme classique et celle de l'égalitarisme. La première de ces deux visions a conduit à définir de manière naturelle la fonction somme comme fonction d'agrégation des utilités individuelles. La fonction d'utilité collective utilitariste classique est issue d'une certaine idée de la justice collective : la justice selon l'adéquation. Chaque agent produisant une part d'utilité collective, si un agent est plus productif qu'un autre, et seulement dans ce cas, il aura le droit à plus de ressource.

Définition 1.30 (Utilité collective utilitariste classique) *La* fonction d'utilité collective utilitariste classique *est la fonction de $\mathscr{V}^n$ dans $\mathscr{V}$: $g^\star : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i$.*

Cette fonction d'utilité collective est intéressante du point de vue de l'efficacité : il est apparent qu'elle satisfait le principe d'unanimité. En outre, elle garantit aussi l'anonymat, l'indépendance vis-à-vis des agents non concernés, et une propriété d'*insensibilité à une dilatation linéaire commune des utilités*. Cette dernière propriété, appelée *independance of common utility scale* dans la littérature anglophone, exprime simplement le fait qu'une transformation linéaire de tous les profils d'utilité ne change pas leur ordre, ou en d'autres termes : pour tout $\lambda > 0$, $\overrightarrow{u} \preceq \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{u} \preceq \lambda\overrightarrow{v}$. Cette propriété est partagée par toutes les fonctions de la famille somme des puissances (introduite plus loin dans cette section).

Si la fonction utilitariste classique possède quelques bonnes propriétés, elle est en revanche assez peu intéressante du point de vue de l'équité, si toutefois par «équité» on entend égalité entre les agents. Elle ne garantit pas la juste part, et ne réduit pas les inégalités (voir [Moulin, 1988]) — notons qu'elle ne les augmente pas non plus, elle y est indifférente. Dans tous les cas, utiliser une telle fonction d'agrégation peut conduire à des partages très inégalitaires : dans un cas extrême, on peut avoir à choisir entre les profils $(100, 0)$ et $(49, 50)$. La fonction d'utilité utilitariste classique choisira le premier profil, de loin le plus inégalitaire des deux.

Fonction d'utilité collective égalitariste La deuxième fonction d'utilité collective la plus classique correspond à la vision égalitariste de la justice collective. Contrairement à la fonction utilitariste, cette fonction attribue les biens selon les besoins, et non selon la productivité. Elle tend à égaliser le vecteur des utilités individuelles, et n'hésite pas à sacrifier la satisfaction d'un grand nombre d'agents au profit du moins riche.

Définition 1.31 (Utilité collective égalitariste) *La* fonction d'utilité collective égalitariste *est la fonction de $\mathscr{V}^n$ dans $\mathscr{V}$: $g^{(e)} : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \min_{i=1}^n u_i$.*

La fonction d'utilité égalitariste a une particularité intéressante. Elle satisfait la propriété d'*insensibilité à une dilatation commune croissante quelconque des utilités* (*independance of common utility pace*), c'est-à-dire que l'on a $g^{(e)}(u_1, \ldots, u_n) \leq g^{(e)}(v_1, \ldots, v_n) \Leftrightarrow g^{(e)}(\tau(u_1), \ldots, \tau(u_n)) \leq g^{(e)}(\tau(v_1), \ldots, \tau(v_n))$ pour toute transformation τ croissante non nécessairement linéaire. Les utilités individuelles peuvent donc subir n'importe quelle transformation croissante sans changer l'ordre des profils d'utilité.

La fonction d'utilité égalitariste satisfait de même certaines propriétés d'équité telles que l'anonymat ou la juste part garantie, mais en revanche, à l'instar de la fonction utilitariste, elle est indifférente aux inégalités. Cette fonction a un autre problème autrement plus important : elle ne satisfait pas le principe le plus basique d'unanimité — en fait, elle le satisfait au sens *faible* (c'est-à-dire que dans la définition de l'unanimité, $u \succeq v$ au lieu que $u \succ v$). En outre, elle ne satisfait pas non plus l'indépendance vis-à-vis agents non concernés. Ces effets néfastes du min (indifférence aux inégalités, non satisfaction du principe d'unanimité et dépendance vis-à-vis des agents non concernés) sont quelquefois appelés «effet de noyade» voir [Fargier *et al.*, 1993; Dubois et Fortemps, 1999] et sont dus à l'idempotence de l'opérateur min qui se concentre donc sur une seule composante et néglige la comparaison des autres. Considérons par exemple les vecteurs $(1, 1000, \ldots, 1000)$ et $(1, \ldots, 1)$: la fonction d'utilité collective égalitariste laisse ces deux vecteurs indifférents, alors que le premier est clairement meilleur que le second. Ces lacunes n'en font pas une fonction d'utilité collective très pertinente en l'état.

Il existe un raffinement classique connu de cette fonction, qui pallie ces lacunes : l'ordre collectif *leximin*. Cet ordre a été introduit dans [Sen, 1970], en relation avec les travaux de [Rawls, 1971] Il a été repris de nombreuses fois, notamment par [Kolm, 1972; d'Aspremont et Gevers, 1977; Moulin, 1988].

Définition 1.32 (préordre leximin [Sen, 1970; Kolm, 1972]) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'utilité de $\mathscr{V}^n$. Ils sont indifférents pour le préordre* leximin *si et seulement si $\overrightarrow{u}^{\uparrow} = \overrightarrow{v}^{\uparrow}$. $\overrightarrow{u}$ est préféré strictement à $\overrightarrow{v}$ (noté $\overrightarrow{u} \succ_{\text{leximin}} \overrightarrow{v}$) si et seulement si $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $u_i^{\uparrow} = v_i^{\uparrow}$ et $u_{k+1}^{\uparrow} > v_{k+1}^{\uparrow}$.*

Le préordre leximin, s'il est classique dans le domaine de la décision collective, l'est aussi dans le domaine de la logique floue ([Dubois et Fortemps, 1999]). Dans ce dernier domaine, un autre raffinement classique du min est souvent introduit : l'ordre discrimin. Là où l'ordre leximin compare deux alternatives grâce à la comparaison de leurs rangs d'utilité par ordre croissant, l'ordre discrimin utilise la relation d'inclusion : une alternative est préférée à une autre si à un rang donné l'ensemble des agents ayant cette valeur d'utilité de la première alternative est strictement inclus dans ce même ensemble pour l'autre alternative (et si pour les rangs inférieurs ces ensembles sont égaux). Ce raffinement paraît moins pertinent dans le contexte du partage équitable : d'une part, le préordre induit n'est pas total et laisse de nombreuses alternatives incomparables, et d'autre part il ne satisfait pas le principe d'anonymat, en laissant des profils permutés incomparables entre eux au lieu de les laisser indifférents.

L'ordre collectif leximin fonctionne en comparant les utilités des agents les plus pauvres des deux partages. Si ces utilités sont égales, on compare les utilités des prochains dans l'ordre d'utilité croissante, jusqu'à trouver une différence. Cet ordre est le raffinement efficace de la fonction d'utilité collective égalitariste, dans le sens où l'ensemble des solutions admissibles non dominées pour l'ordre leximin est inclus dans l'ensemble des solutions maximisant la fonction d'utilité égalitariste. En conséquence, le leximin possède toutes les bonnes propriétés héritées de la fonction min : anonymat, insensibilité à une dilatation commune croissante quelconque des utilités, juste part garantie. Elle vérifie en plus la propriété de réduction des inégalités, l'indépendance vis-à-vis des agents non concernés, et enfin l'unanimité, ce qui en fait un ordre tout-à-fait pertinent pour l'agrégation d'utilités en une décision collective.

Le préordre leximin possède de plus une propriété remarquable, ce qui explique le fait qu'il occupe une place aussi centrale dans la théorie du *welfarisme* cardinal. C'est en effet le seul ordre de bien-être collectif qui respecte à la fois le principe de réduction des inégalités et l'insensibilité à une dilatation commune croissante quelconque des utilités (voir par exemple [Moulin, 1988, page 40] ou [Moulin, 2003, page 76]).

Nous pouvons cependant remarquer que nous avons défini le critère leximin comme un ordre de bien-être social, et non comme une fonction d'utilité collective, ce qui conduit à l'interrogation légitime : est-il possible de représenter l'ordre de bien-être social leximin par une fonction d'utilité collective ? La réponse est connue (voir par exemple [Moulin, 1988]) et négative dans le cas général :

Proposition 1.3 (voir [Moulin, 1988]) *L'ordre leximin n'est pas représentable par une fonction d'utilité collective, à moins que l'ensemble des utilités ne soit fini ou infini dénombrable.*

Ce résultat négatif n'est pas vraiment limitatif dans le cas général, car dans tous les problèmes concrets que nous aurons à traiter, l'ensemble des alternatives (donc des profils d'utilité) sera bien entendu fini. Dans ce cas précis, il existe des fonctions d'utilité collective permettant de représenter l'ordre leximin, comme nous allons le voir dans le chapitre 5 consacré à l'algorithmique du leximin. Nous aurons cependant à nous poser la question de la pertinence et de l'efficacité opérationnelle liée à la traduction de l'ordre leximin en fonction d'utilité collective.

1.3.4.2 Fonction de Nash

Entre les fonctions d'utilité plutôt extrêmes que sont les fonctions utilitaristes et égalitaristes, on peut définir un certain nombre de fonctions intermédiaires permettant de réaliser des compromis entre ces points de vue. D'un point de vue «philosophique», ces fonctions intermédiaires permettent de réaliser un compromis entre le principe de compensation (égalitarisme) et le principe d'adéquation (utilitarisme).

La première de ces fonctions, moins utilisée que les deux précédentes dans la littérature, mais possédant de bonnes propriétés, est la fonction de Nash :

Définition 1.33 (Utilité collective de Nash) *La* fonction d'utilité collective de Nash *est la fonction de $\mathscr{V}^n$ dans $\mathscr{V}$: $g^{(N)} : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} u_i$.*

Cette fonction a l'avantage de présenter la propriété d'être *indépendante vis-à-vis des échelles individuelles d'utilité*, ce qui signifie que l'échelle sur laquelle est exprimée la satisfaction d'un agent ne compte pas dans le choix de la décision collective, contrairement à l'utilitarisme qui accorde de l'importance seulement aux agents les plus producteurs d'utilité, et à l'égalitarisme qui accorde de l'importance aux plus pauvres uniquement. La fonction de Nash apparaît comme un compromis séduisant dans certains problèmes tels que les problèmes du type partage de temps d'utilisation d'une ressource avec externalités (voir l'exemple de la radio dans [Moulin, 1988, page 80]). En outre, elle est compatible avec l'ordre de Pareto (elle vérifie l'unanimité), l'indépendance vis-à-vis des agents non concernés, et elle réduit les inégalités. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette fonction d'utilité dans le chapitre 2.

1.3.4.3 Somme des puissances

La véritable puissance du cadre du *welfarisme* cardinal réside en partie dans la possibilité d'exprimer des compromis paramétrables entre les fonctions égalitariste et utilitariste classique, par le biais de familles de fonctions. Parmi les familles permettant de représenter un large spectre d'ordres de bien-être social, l'une d'elle a été introduite dans un théorème de [Roberts, 1980].

Définition 1.34 (Famille somme des puissances) *La famille de fonctions d'utilité collective* somme des puissances *est la famille :*

$$\forall p \in \mathbb{R}\ g^{(p)}(\overrightarrow{u}) = \begin{cases} sgn(p) \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i^p & \textit{pour } p \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \log u_i & \textit{pour } p = 0 \end{cases}, \textit{ avec } \forall p \neq 0,\ sgn(p) = \frac{p}{|p|}.$$

Cette famille de fonctions est intéressante à plusieurs points de vue. Tout d'abord, remarquons qu'elle est «continue» en 0, en ce qui concerne les ordres de bien-être collectif représentés. En effet, $\forall a > 0,\ a^x = 1 + x\log(a) + o_{x\to 0}(x^2)$, donc $\sum_{i=1}^n u_i^p = \sum_{i=1}^n (1 + p\log(u_i)) + o_{p\to 0^+}(p^2) = n + p\sum_{i=1}^n \log(u_i) + o_{p\to 0^+}(p^2)$. La fonction $x \mapsto n + px$ étant croissante pour $p > 0$, $n + p\sum_{i=1}^n \log(u_i)$ représente le même ordre de bien-être social que $\sum_{i=1}^n \log u_i$. Le même raisonnement montre la continuité des ordres de bien-être social lorsque $p \to 0^-$.

Ces fonctions ont une autre propriété intéressante. Le théorème de [Roberts, 1980] montre que tous les ordres de bien-être collectifs vérifiant l'anonymat, continus, et séparables (vérifiant la propriété d'indépendance vis-à-vis des agents non concernés) peuvent être représentés par une fonction d'utilité collective de cette famille. Il faut préciser toutefois ce que l'on entend par «continuité» d'un ordre de bien-être collectif : un ordre de bien-être collectif $\succeq$ est dit continu si et seulement si pour tout profil $\overrightarrow{u}$ les ensembles $\{\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \preceq \overrightarrow{u}\}$ et $\{\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \preceq \overrightarrow{v}\}$ sont fermés pour une topologie de l'ensemble $\mathscr{V}$ (en général on suppose que $\mathscr{V} = \mathbb{R}$ et bien entendu la topologie choisie est celle de l'ensemble des ouverts sur les réels). En outre, comme nous l'avons précisé précédemment, toutes les fonctions de cette famille vérifient la propriété d'insensibilité à une dilatation linéaire commune des utilités.

Cette famille somme des puissances fait la jonction entre des fonctions très inégalitaires (lorsque $p > 1$, $g^{(p)}$) augmente les inégalités, et des fonctions plus équitables : lorsque $p \to -\infty$, l'ordre de bien-être social représenté tend vers l'ordre leximin. Nous avons en conséquence la proposition intéressante suivante :

Proposition 1.4 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un $p < 0$ tel que $g^{(p')}$ représente l'ordre* leximin *pour tout $p' \leq p$.*

La preuve de cette proposition est détaillée à la section B.2.2 de l'annexe B. Il s'avère en revanche plus ardu de trouver l'exposant p maximum tel que $g^{(p')}$ représente l'ordre leximin pour tout $p' \leq p$. Un début d'étude de ce problème est présenté en section B.3 de la même annexe.

À la jonction entre les fonctions réduisant les inégalités ($p < 1$) et les fonctions les augmentant ($p > 1$), se trouve la fonction d'utilité collective utilitariste $g^{(1)}$. De même, à la jonction entre les fonctions qui avantagent les producteurs d'utilité — que l'on pourrait appeler *pseudo-utilitaristes* ($p > 0$) — et les fonctions qui avantagent les agents les plus pauvres — selon la même terminologie, *pseudo-égalitaristes* ($p < 0$) — se trouve l'ordre de bien-être social représenté par la fonction de Nash, $g^{(0)}$, qui est insensible aux échelles des utilités individuelles. Il est à noter que dans la littérature, on restreint souvent la famille somme des puissances aux indices $p \leq 1$, négligeant de fait explicitement les fonctions d'utilité qui augmentent strictement les inégalités.

La figure 1.7 montre la représentation graphique de quelques fonctions puissances, permettant d'illustrer de manière intuitive le principe d'avantage aux riches ou aux pauvres selon la convexité ou la concavité de la courbe. Plus l'exposant p tend vers $-\infty$, plus la fonction $g^{(p)}$ accorde de l'importance aux incréments d'utilité d'un agent pauvre (dont l'utilité est proche de 0), par rapport aux incréments d'utilité d'un agent riche. Cela se traduit graphiquement par la concavité très accentuée de la courbe $u \mapsto u^p$. À l'inverse, si $p > 1$, la convexité de la courbe $u \mapsto u^p$ illustre le fait que plus un agent est riche, plus il sera incité à devenir riche, car plus son utilité augmente, plus un incrément unitaire de son utilité individuelle a d'effet positif sur l'utilité.

La figure 1.8 montre un exemple de courbes iso-utilité collective de quatre fonctions de la famille somme des puissances n'augmentant pas les inégalités[8] pour un problème à deux agents, en fonction de l'utilité individuelle de ces deux agents. On peut remarquer que plus p tend vers $-\infty$, plus les courbes iso-utilité se rapprochent d'une courbe «iso-min».

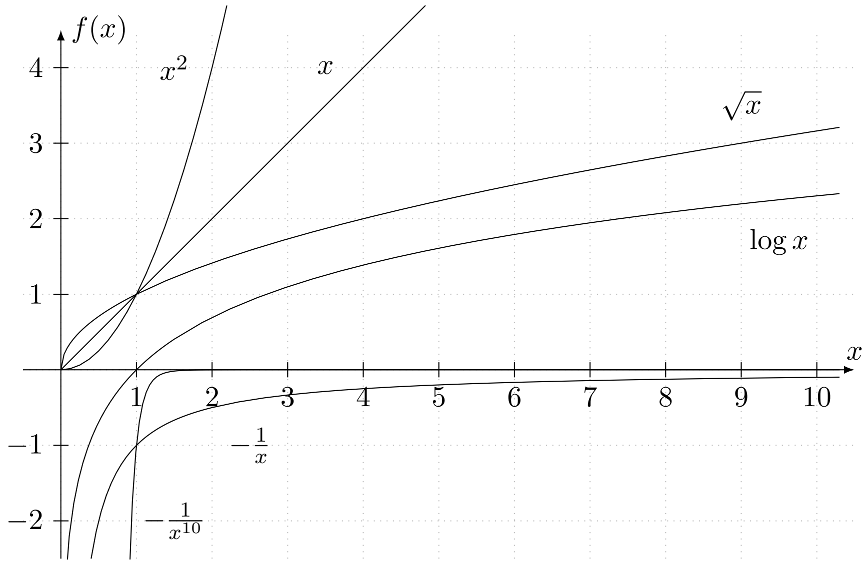


Figure 1.7 — La représentation graphique de quelques fonctions puissance.

1.3.4.4 Moyennes pondérées ordonnées (OWA)

La famille de fonctions somme des puissances était fondée sur des propriétés analytiques fortes : la continuité et la séparabilité, qui équivalent à peu de choses près à une notion de dérivabilité des fonctions. Une seconde famille est très utilisée dans le domaine de l'agrégation de fonctions d'utilité : celle des moyennes pondérées ordonnées [Yager, 1988], ou OWA (pour *Ordered Weighted Averages*). L'idée à la base de la construction de ces fonctions d'utilité est d'introduire une famille permettant de pondérer l'importance des agents non pas selon leur identité, mais selon la place de leur utilité par rapport à l'utilité des autres : on peut ainsi donner de manière explicite l'avantage aux agents les plus pauvres ou les plus riches, ou encore par exemple concentrer l'importance sur les agents situés au milieu de l'échelle des richesses.

Définition 1.35 (Famille OWA) *La famille de fonctions d'utilité collective* moyenne pondérée ordonnée *(ou OWA pour Ordered Weighted Average) est la famille :*

$$g^{\overrightarrow{w}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \times u_i^{\uparrow}, \text{ avec } \overrightarrow{w} \in [0,1]^n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Les deux fonctions d'utilité classiques admettent une représentation sous forme d'OWA : la fonction utilitariste correspond à l'OWA $g^{(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})}$, et la fonction égalitariste correspond à l'OWA $g^{(1,0,\ldots,0)}$. D'autres fonctions classiques, mais moins utilisées dans le cadre de la décision collective

[8]Notons que pour une fonction d'utilité collective respectant le principe d'unanimité, cette propriété est équivalente à la concavité des courbes iso-utilités.

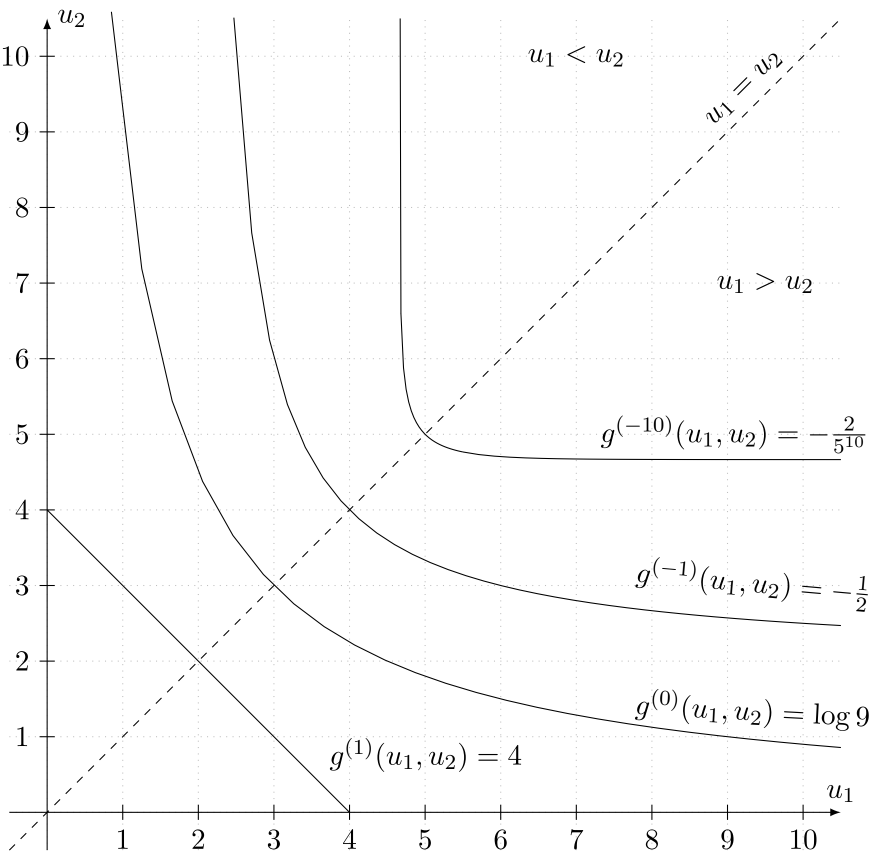


Figure 1.8 — Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille somme des puissances, pour 2 agents : $g^{(1)}$, $g^{(0)}$, $g^{(-1)}$ et $g^{(-10)}$.

équitable car peu appropriées dans ce contexte, peuvent être représentées par les moyennes pondérées ordonnées. Nous pouvons citer la fonction élitiste $g^{el} = \overrightarrow{u} \mapsto \max_i(u_i) = g^{(0,0,\dots,1)}$ (qui est à l'opposé de la fonction égalitariste, mais peut être utile dans certains contextes où l'on s'intéresse à la maximisation de l'utilité d'un seul agent), ou encore la fonction dictatoriale de rang k, qui s'écrit $g^{\overrightarrow{w}}$, avec $w_i = 0$ si $i \neq k$, et $w_k = 1$, et généralise les fonctions égalitariste et élitiste. En outre, comme toutes les fonctions d'utilité collective introduites jusqu'ici, toutes les fonctions de la famille OWA vérifient la propriété d'insensibilité à une dilatation linéaire commune des utilités. Il existe de plus une caractérisation très simple des fonctions d'utilité collective de la famille OWA qui respectent le principe de réduction des inégalités : ce sont exactement les fonctions telles que $\forall(i, j),\ i > j \Rightarrow w_i < w_j$.

De plus, tout comme avec la famille somme des puissances, l'ordre leximin peut être représenté par un OWA si l'ensemble des utilités est fini ([Dubois *et al.*, 2001]) :

Proposition 1.5 *Si l'ensemble des profils d'utilité est fini, alors il existe un OWA qui représente l'ordre leximin.*

La preuve de cette proposition est détaillée à la section B.2.1 de l'annexe B.

Comme nous l'avons fait remarquer, la famille des moyennes pondérées ordonnées est construite pour permettre de contrôler précisément l'avantage donné aux faibles ou aux larges utilités dans l'agrégation, par la modulation des poids du vecteur $\overrightarrow{w}$. Ces notions d'avantage aux faibles ou aux larges utilités peut même être mesuré par des indices numériques : ainsi, Yager propose deux mesures caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{w}$ [Yager, 1988] :

1. $\alpha(\overrightarrow{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-j}{n-1} w_j$. Le coefficient $\alpha \in [0,1]$ mesure l'avantage donné aux utilités les plus faibles par rapport aux utilités les plus fortes. Par exemple, si $\overrightarrow{w} = (1, 0, \ldots, 0)$ (égalitarisme), $\alpha = 1$; si $\overrightarrow{w} = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ (utilitarisme), $\alpha = 0.5$; si $\overrightarrow{w} = (0, 0, \ldots, 1)$ (élitisme), $\alpha = 0$.
2. $disp(\overrightarrow{w}) = -\sum_{i=1}^{n} \log(w_j) w_j$ (avec la convention $w \log(w) = 0$ si $w = 0$). Le coefficient $disp \in [0, \log(n)]$ mesure le degré d'utilisation de l'information contenue dans le vecteur d'utilités : si une seule valeur est utilisée, $disp = 0$; si l'OWA est symétrique, $disp = \log(n)$.

Enfin, la figure 1.9 montre un exemple de courbes iso-utilité collective de quatre fonctions de la famille OWA n'augmentant pas les inégalités pour un problème à deux agents, en fonction de l'utilité individuelle de ces deux agents, afin d'illustrer, tout comme pour la famille somme des puissances, la manière dont le vecteur de poids permet de moduler la fonction d'agrégation entre l'égalitarisme pur et l'utilitarisme.

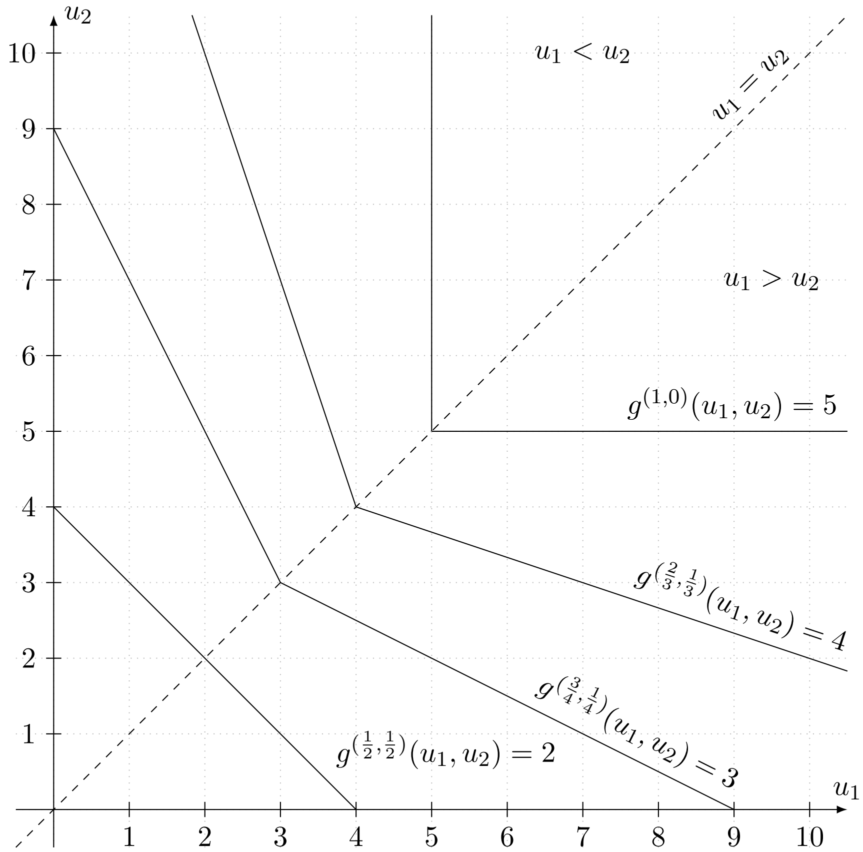


Figure 1.9 — Courbes iso-utilité collective de 4 fonctions d'utilité collective de la famille OWA, pour 2 agents : $g^{(1,0)}$, $g^{(\frac{2}{3},\frac{1}{3})}$, $g^{(\frac{3}{4},\frac{1}{4})}$ et $g^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

1.3.4.5 Normalisation des utilités

Il est un point crucial pour le bon fonctionnement du modèle *welfariste* cardinal que nous avons passé sous silence jusqu'ici : celui de la normalisation des utilités. Nous avons supposé implicitement dans la présentation du modèle que les utilités des agents étaient exprimées sur une échelle commune (monétaire par exemple), et donc que leur comparaison interpersonnelle était possible. Cependant, dans de nombreux problèmes réels, il est difficile d'imposer aux agents une échelle commune d'expression des utilités, et leur permettre de les exprimer librement empêche le bon fonctionnement de la justice sociale apportée par le modèle *welfariste* (sauf à utiliser la fonction de Nash qui est insensible à l'échelle individuelle des utilités) : par exemple, un agent qui sait que la fonction d'utilité collective utilisée est la fonction min peut très bien choisir de diviser sa fonction d'utilité individuelle par 10 pour se faire paraître plus malheureux qu'il n'est.

Deux solutions simples à ce problème existent. La première est d'imposer les échelles individuelles d'utilité, par exemple en attribuant le même nombre de points à chaque agent à répartir entre toutes les alternatives possibles. Toutefois, dans certains cas, une telle contrainte est trop contraignante pour l'expression des utilités. Dans ce cas, une normalisation des utilités individuelles avant partage est souhaitable. La solution classiquement adoptée est celle de Kalai-Smorodinsky [Kalai et Smorodinsky, 1975], qui normalise les utilités individuelles selon l'utilité maximale pouvant être obtenues par chaque agent s'il était seul dans le partage :

Définition 1.36 (Fonction d'utilité normalisée de Kalai-Smorodinsky) *Soit g une fonction d'utilité collective. Alors la* fonction d'utilité normalisée de Kalai-Smorodinsky *est la fonction :*

$$g^{(KS)} : (u_1, \dots, u_n) \mapsto g(\frac{u_1}{\widehat{u_1}}, \dots, \frac{u_n}{\widehat{u_n}}), \text{ où } \forall i, \widehat{u_i} = \max_{\overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A}} u_i(\overrightarrow{\pi}).$$

En fait, la solution de Kalai-Smorodinsky est plus spécifique que cette définition, puisqu'elle impose aussi la fonction g à être la fonction égalitariste min : il s'agit au final d'un «égalitarisme relatif». Cette définition, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, sort légèrement du cadre du *welfarisme*, puisque l'utilité collective dépend non seulement de l'ensemble des utilités individuelles, mais aussi de l'ensemble des utilités individuelles possibles : en d'autres termes, il s'agit d'une fonction de choix social, dans le cadre proposé dans [Nash, 1950].

Le problème de la normalisation des utilités pourrait constituer un vaste sujet d'étude, à mettre en relation avec l'étude des stratégies et de la manipulation. Nous avons choisi de ne pas aborder ces sujets, et nous considérerons donc par la suite que nous avons affaire à des utilités individuelles implicitement normalisées, et en tout cas commensurables.

1.4 Distribution ou répétition dans le temps de la procédure d'allocation

Si nous nous sommes attachés à décrire jusqu'ici l'ensemble des composantes permettant de modéliser un problème de partage, nous n'avons en revanche rien dit concernant la procédure d'allocation elle-même.

1.4.1 Partage centralisé ou distribué

La question de savoir qui partage la ressource, si elle n'est que peu pertinente dans le cas où on ne s'intéresse qu'à l'aspect qualitatif du partage (formalisé par le bien-être social), est en revanche un point crucial dans la mise au point de protocoles de partage. On peut distinguer deux grandes orientations : le partage centralisé ou le partage distribué.

Dans le premier cas, un agent particulier joue le rôle de distributeur de la ressource. Les agents se contentent de lui communiquer leurs préférences, sous la forme d'un protocole de partage prédéfini. L'agent distributeur a pour rôle d'allouer la ressource aux agents au vu des préférences qu'ils lui ont communiquées. Cette solution est la plus étudiée en informatique, notamment parce qu'elle a l'avantage de limiter les coûts de communication (dans le domaine des enchères électroniques par exemple, ce point est crucial), et parce que le pas en avant récent du domaine très étudié des enchères combinatoires [Cramton *et al.*, 2006; Sandholm, 1999, 2002; Rothkopf *et al.*, 1998; Lehmann *et al.*, 1999] a permis le développement et l'utilisation d'un ensemble d'algorithmes centralisés extrêmement performants, jouant en l'occurrence le rôle du commissaire-priseur des enchères. Les notions d'algorithmique sont à la base de la vision centralisée des problèmes d'allocation de ressource.

Le principal argument contre cette approche centralisée des problèmes de partage est que dans la réalité il peut être difficile de trouver un agent qui assume le rôle du «dictateur bienveillant» en charge du partage de la ressource, que ce soit pour des raisons de capacité de calcul (la vision centralisée a des besoins de calcul relativement conséquents) ou plus simplement pour des raisons d'absence de confiance en cet agent [Chevaleyre *et al.*, 2006a], ou en d'autres termes de confidentialité. La vision distribuée du problème de partage apparaît donc comme une alternative naturelle et intéressante lorsque l'on a affaire a des problèmes intraitables algorithmiquement, mais pour lesquels de simples petites améliorations par rapport à l'allocation initiale sont considérées comme des succès conséquents.

Dans le cas d'une approche distribuée de l'allocation, tous les agents jouent le même rôle. À partir d'un partage initial (supposé peu intéressant), les agents procèdent par échange d'objets pour arriver à une allocation supposée meilleure. Un tel échange est appelé *négociation* dans la littérature, bien que ce terme puisse prêter à confusion, puisqu'en fait, les agents n'ont que peu de latitude dans le choix des objets à échanger, et réagissent à un protocole bien déterminé. Les questions soulevées par cette approche sont diverses. Elles concernent par exemple la mise au point de protocoles de négociation et de dialogue entre les agents [Smith, 1980] ou, comme l'ont mis en avant certains travaux récents que nous citons plus loin, les propriétés de convergence vers un partage optimal, selon le type d'échanges autorisés. Ces derniers travaux se sont concentrés sur des échanges *rationnels* avec compensation monétaire possible, c'est-à-dire tels qu'à la fin de l'échange, toute baisse éventuelle d'utilité d'un agent est compensée par une somme d'argent valant au moins l'utilité perdue. Cette hypothèse est raisonnable : dans un cadre réel, un agent humain n'accepte de procéder à un échange que s'il a quelque chose à y gagner (l'altruisme pur est exclu de ce genre de problèmes) : soit un objet, soit une compensation monétaire. En général, ces travaux se concentrent aussi sur des échanges très simples (c'est-à-dire impliquant un nombre limité d'agents et d'objets) : les plus simples de ces échanges sont des 1-*deals*, impliquant un seul objet (ainsi que la monnaie utilisée pour le paiement) et deux agents.

De manière très intéressante, les propriétés de convergence de séquences d'échanges vers un optimum global sont nombreuses [Chevaleyre *et al.*, 2005a,b; Endriss *et al.*, 2006; Chevaleyre *et al.*, 2007a]. La première d'entre elles est due à Sandholm [Sandholm, 1998] : toute séquence d'échanges rationnels (avec compensation monétaire) est finie et converge vers un optimum utilitariste. Ce résultat, s'il est intéressant d'un point de vue théorique, a cependant peu d'application pratique. En effet, de manière générale il se peut qu'à un stade de la négociation il n'existe que des échanges rationnels extrêmement compliqués, et en particulier impliquant de nombreux agents et objets.

Il existe cependant des résultats concernant les séquences d'échanges simples (1-*deals*), pour peu que l'on ajoute quelques hypothèses à la forme des fonctions d'utilité des agents. Ainsi, si les utilités des agents sont additives, toute séquence d'échanges simples rationnels est finie et conduit à un optimum utilitariste [Endriss *et al.*, 2006]. D'autres types de restrictions (échanges coopératifs, échanges égalitaires) ont aussi été étudiées. Ces restrictions conduisent à d'autres types de résultats de convergence (convergence vers une allocation Pareto-optimale, convergence vers une allocation optimale au sens égalitariste, ...). Parallèlement a été étudié le lien entre certaines classes de fonctions d'utilité et les propriétés de convergence : quelques classes de fonctions d'utilité garantissant la convergence vers un optimum utilitariste des séquences d'échanges rationnels pour un certain type de *deals* ont été mises en évidence [Chevaleyre *et al.*, 2005b].

Si le lien entre optimisation d'une fonction d'utilité et échange rationnel est assez clair, et fournit donc un ensemble de résultats de convergence assez intuitifs, le lien entre ces échanges rationnels et l'absence d'envie est plus difficile à obtenir : d'une part l'absence d'envie est fondée sur l'appréciation personnelle d'une situation, et d'autre part le mécanisme d'échange rationnel d'objets, même s'il s'agit d'un mécanisme local, tend à faire augmenter l'utilité collective. Des travaux récents, présentés dans [Chevaleyre *et al.*, 2007a], établissent un lien entre l'absence d'envie et les processus de négociation rationnelle : moyennant quelques hypothèses sur les fonctions d'utilité (additivité, superadditivité), sur les fonctions de paiement qui imposent la valeur des compensations monétaires aux agents en fonction des utilités des objets échangés, ou encore sur l'allocation initiale, il est possible de garantir la convergence de toute séquence d'échanges vers un état Pareto-efficace et sans envie (notons qu'en présence de compensations monétaires et de propriétés de superadditivité sur les fonctions d'utilité individuelle il en existe toujours un). Ces travaux ont aussi conduit à la proposition de mesures d'envie et à l'étude expérimentale de la rapidité de convergence vers un état à envie minimale par une séquence d'échanges rationnels. L'ensemble de ces travaux est présenté dans la thèse [Estivie, 2006].

Notons enfin qu'il existe un ensemble de travaux relativement récents sur la distribution de la résolution d'un problème d'optimisation. Ces travaux, qui ont une portée beaucoup plus générale que le simple problème de partage, mais s'y appliquent parfaitement, portent sur le développement d'algorithmes de résolution décentralisés appliqués à des problèmes d'optimisation combinatoire impliquant un certain nombre d'agents, nombre potentiellement inconnu ou non borné. Ce genre de problèmes peut se trouver par exemple dans le domaine des fournisseurs de services en ligne sur Internet, dont le rôle est de proposer à un ensemble (inconnu) de clients un certain nombre de services proposés par un ensemble (potentiellement large) de fournisseurs. Il est impensable dans ce contexte d'envisager une modélisation et une résolution centralisée du problème, d'autant plus que les variables d'un tel problème sont susceptibles d'évoluer dans le temps.

L'idée à la base de tous les travaux de recherche sur le sujet des problèmes d'optimisation décentralisés est de déléguer aux agents la résolution des sous-problèmes locaux qui les concernent. La solution partielle calculée par ces agents est ensuite propagée de manière synchrone ou asynchrone sous la forme de messages. Ces techniques sont appliquées avec succès à la résolution décentralisée de problèmes de choix social, et les derniers travaux sur le sujet intègrent des techniques de résistance aux manipulations. On pourra consulter [Faltings, 2006] pour avoir un aperçu détaillé de ces techniques, et on pourra trouver dans [Petcu *et al.*, 2006] un exemple d'algorithme de résolution d'un problème d'optimisation distribué fondé sur la délégation de la résolution aux agents, et sur un mécanisme de résistance aux manipulations.

Par la suite, nous laisserons de côté les problèmes liés au partage distribué, afin de nous concentrer uniquement sur les procédures d'allocation centralisées.

1.4.2 Répétition dans le temps du problème d'allocation

Nous conclurons notre taxonomie des problèmes de partage en évoquant le sujet de la répétition des problèmes de partage dans le temps. Les applications du monde réel ne se résument généralement pas à un partage unique. Au lieu de cela, elles impliquent souvent un ensemble de partages distincts, ou un partage répété dans le temps. L'application 1 concernant la constellation Pléiades est un exemple parfait : chaque jour le centre de programmation et planification doit réaliser le partage des prises de vue entre les agents.

Il faut dans ce cas reconsidérer notre modèle. Là où un partage unique force les agents (et le décideur) à un grand nombre de concessions en vertu du principe d'équité, ces concessions peuvent être évitées ou atténuées dans le cas d'un partage répété dans le temps, car l'équité peut être obtenue dans ce cas par *régulation temporelle* : l'inéquité d'un partage à l'instant t peut être compensée par l'inéquité d'un autre partage à un instant $t' > t$. Il serait donc dommage dans ce cas de vouloir traiter chaque occurrence du problème de partage séparément avec le modèle *welfariste* introduit ci-avant, car on perdrait l'ensemble des bénéfices dus à la régulation temporelle. Bien entendu, si le nombre de répétitions du partage est fini et connu à l'avance, on peut traiter l'ensemble des instances comme un problème global, mais on se heurte alors à plusieurs écueils :

- ▷ celui de l'explosion combinatoire ;
- ▷ celui de connaître à l'avance le nombre d'occurrences du problème de partage dans le temps (dans le cas du problème Pléiades, on peut même considérer en première approximation qu'il est infini), ainsi que les instances elles-mêmes ;
- ▷ celui des préférences des agents, qui sont souvent dépendantes du temps.

Alors qu'il existe une grande littérature sur le problème relativement voisin des *jeux répétés* [Aumann et Hart, 2002], en revanche, les problèmes d'allocation répétée n'ont été que peu étudiés à notre connaissance. On compte toutefois une exception à cette remarque, constituée par l'ensemble des travaux sur le problème Pléiades, notamment [Lemaître *et al.*, 1999, 2004], qui proposent un ensemble de modèles et protocoles permettant de prendre en compte la régulation temporelle dans la recherche de solutions efficaces et équitables. Le moyen proposé dans ces travaux pour prendre en compte la régulation temporelle est de traiter le problème de partage à l'instant t en intégrant les variables de k problèmes de partage antérieurs à t en tant que données figées mais influençant le partage courant. En d'autres termes, on résout à chaque temps t un problème constitué du problème courant et des k derniers problèmes résolus. Ce mécanisme de fenêtre glissante permet d'assurer l'équité et l'efficacité en s'appuyant sur la régulation temporelle.

1.5 Conclusion

Nous avons tâché tout au long de ce chapitre de dresser une taxonomie succincte des problèmes de partage, articulée autour de la modélisation des briques de base de ces problèmes. Nous nous sommes concentrés sur les aspects suivants, inspirés de l'article [Chevaleyre *et al.*, 2006a] :

- ▷ Le type de la ressource : elle peut être continue, discrète, indivisible, multi-unités.
- ▷ La modélisation des préférences : les préférences des agents peuvent être représentées par une structure ordinale générale ou particulière (dichotomique, ordres d'intervalles, semi-ordres), qualitative, ou numérique.
- ▷ L'agrégation des préférences et les propriétés des partages : le modèle dominant dans le domaine du partage est le *welfarisme* cardinal, fondé sur les ordres de bien-être social portant sur les profils d'utilité : ordres utilitariste, égalitariste, leximin, somme des puissances, OWA… Un certain nombre de propriétés permettent de caractériser les partages, décisions collectifs ou ordres de bien-être sociaux : Pareto-efficacité, anonymat, juste part, absence d'envie, réduction des inégalités, …
- ▷ La procédure d'allocation : celle-ci peut être centralisée ou distribuée entre les agents.
- ▷ La répétition dans le temps : on peut avoir affaire à un problème de partage simple ou répété dans le temps. Les modèles entrant en jeu ne sont pas les mêmes.

Bien entendu, cette introduction n'a pas la prétention ni la vocation d'être exhaustive, et certains problèmes relatifs au partage, ou certains aspects ont été éludés dans ce chapitre. Ainsi, nous aurions pu évoquer d'autres sujets aussi divers que l'introduction d'incertitudes dans le partage, la prise en compte d'informations incomplètes, ou encore la notion de stratégies de manipulation. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la littérature abondante sur ces sujets.

Nous allons maintenant définir les bornes de notre étude des problèmes de partage, en nous inspirant de l'ensemble des considérations introduites dans ce chapitre.

Tout d'abord, nous nous limiterons au partage de biens *indivisibles*, et sans compensation monétaire. Cela exclut d'emblée tous les problèmes du type partage de territoires, d'investissements financiers, ou encore de biens après divorce ou décès si les compensations monétaires sont autorisées. Nous nous autorisons n'importe quel type de contraintes sur l'espace des allocations. Ensuite, nous nous plaçons dans le cadre du *welfarisme* cardinal, pour lequel les préférences des agents sont représentées par des indices numériques. Nous nous intéresserons de manière générale à tous les critères et fonctions d'utilité collective introduits lors de la présentation de ce modèle. Enfin, nous nous limiterons à un partage centralisé et non répété dans le temps.

Définition 1.37 (Instance du problème de partage de biens indivisibles) *Une instance du problème de partage de biens indivisibles est un tuple* $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, \mathscr{C}, (f_1, \ldots, f_n), \succeq, \mathscr{V})$*, où :*

- ▷ $\mathscr{N} = \{1, \ldots, n\}$ *est un ensemble fini d'agents ;*
- ▷ $\mathscr{O}$ *un ensemble fini d'objets ;*
- ▷ $\mathscr{C}$ *est un ensemble de contraintes d'admissibilité, c'est-à-dire de sous-ensembles de* $\mathscr{O}^n$ *;*
- ▷ $(f_1, \ldots, f_n)$ *est un ensemble de fonctions d'utilité :* f_i *est la fonction d'utilité de l'agent* i*, qui à toute part* $\pi_i \subseteq \mathscr{O}$ *associe une utilité* $f_i(\pi_i) \in \mathscr{V}$ *;*
- ▷ $\succeq$ *est un ordre de bien-être social sur l'ensemble des profils d'utilité admissibles, c'est-à-dire sur l'ensemble des profils vérifiant toutes les contraintes, éventuellement défini par une fonction d'utilité collective.*

Une solution du problème de partage de biens indivisibles est un partage admissible. Une solution optimale de ce problème est un partage admissible dont le profil d'utilité associé est non dominé au sens de l'ordre de bien-être social $\succeq$. Par la suite, nous nous intéresserons non seulement aux partages optimaux au sens de $\succeq$, mais aussi à l'existence de partages vérifiant certaines propriétés comme l'absence d'envie et la Pareto-efficacité (voir chapitre 4).

Dans le chapitre 2, nous allons introduire une extension de ce modèle afin de prendre en compte la notion de droits exogènes inégaux dans le partage. Puis nous introduirons dans le chapitre 3 un modèle formel du problème de partage de biens indivisibles, qui spécifiera notamment la manière dont seront exprimées les contraintes et les préférences.