Chapitre 2

Droits exogènes

Nous avons introduit au chapitre 1 l'ensemble des éléments formant la base de la modélisation des problèmes de partage. Parmi ces éléments, nous nous sommes en particulier intéressés à la manière dont les préférences des agents peuvent être agrégées pour aboutir finalement à une décision collective (c'est-à-dire dans notre cas à un partage) équitable. Comme nous l'avons vu, la théorie du *welfarisme* cardinal fournit un modèle particulièrement intéressant du problème d'agrégation de préférences individuelles, modèle fondé sur une représentation cardinale des préférences et une agrégation par le biais d'un ordre de bien-être social ou d'une fonction d'utilité collective. Il permet, dans le contexte des problèmes de partage, d'explorer tout un ensemble de compromis entre le principe de compensation — correspondant à l'égalitarisme pur — et le principe d'adéquation (ou *sum-fitness*) — correspondant à l'utilitarisme classique. En revanche, toute idée de récompense est absente de ce modèle.

Intéressons-nous maintenant au principe de droits exogènes. Ce principe permet de prendre en compte dans le problème d'allocation des considérations complètement extérieures à ce problème. Ces raisons extérieures peuvent être diverses, comme nous le verrons sur les exemples ci-après, mais ne peuvent pas provenir directement de la contribution à la création de la ressource, car dans ce cas le principe de droits exogènes interfère avec le principe de récompense (la ressource à l'agent le plus méritant). Ce principe de droits exogènes est présent de manière implicite dans le modèle *welfariste* sous la forme de la propriété d'*anonymat*[1], s'exprimant par la symétrie de l'ordre de bien-être social. Dans ce modèle, les agents sont placés sur un pied d'égalité vis-à-vis de la procédure d'allocation : en d'autres termes, cette procédure est complètement aveugle à l'identité des agents.

Cependant, de nombreux problèmes réels de décision collective et en particulier de partage impliquent des agents qui ne sont pas égaux vis-à-vis de la procédure de décision, et ce pour des raisons aussi diverses que celles exposées dans les exemples ci-après. Nous traduirons cette différence d'importance entre agents par la notion de *droits des agents*, ces droits étant représentés par des indices numériques : plus le droit est élevé, plus l'agent est censé bénéficier de la décision, d'une manière que nous cherchons à capturer précisément.

Voici quelques exemples de problèmes réels nécessitant la prise en compte de droits inégaux sur le partage :

- ▷ **Populations de tailles différentes :** La ressource est un bien de consommation, et les agents sont des populations de tailles différentes. Les agents ont des besoins différents, reconnus par le groupe. Le droit d'une population est sa taille.
- ▷ **Constitution de comité :** Les agents sont des circonscriptions de tailles différentes. On constitue un comité de représentants des circonscriptions. Le nombre total de représentants

[1] Les droits sont égaux dans ce cas.

est fixé. Il s'agit de décider du nombre de représentants par circonscription. Les droits sont les tailles (en nombre d'habitants) des circonscriptions.

- **Banqueroute :** Une société en faillite doit être liquidée. Son actif — dont la valeur est inférieure à la somme des dettes — est réparti entre ses créanciers, qui doivent décider de cette répartition. Le droit d'un créancier est le montant de sa créance.
- **Ressource commune avec investissement initial :** Une ressource commune est exploitée par un groupe d'agents. Ces agents ont participé différemment à la production initiale de la ressource, et à ce titre, ont des revendications particulières sur son exploitation. Chaque agent attend bien entendu un retour sur investissement en rapport avec celui-ci. Cet exemple est illustré parfaitement par l'application 1 concernant l'allocation de prises de vues pour la constellation de satellites Pléiades. Ici, le droit d'un agent correspond à son investissement initial.
- **Productivités différentes :** Un groupe d'agents exploite une ressource commune et la transforme en biens revendus au bénéfice du groupe. Certains sont plus productifs que d'autres. Quelle est la meilleure allocation de la ressource aux agents ? Le droit d'un agent est sa productivité[2].

Les fonctions d'utilité collective et ordres de bien-être social introduites dans le cadre du *welfarisme* cardinal et décrites dans le chapitre 1 sont incapables de prendre en compte une inégalité des droits exogènes, car elles vérifient toutes le principe élémentaire d'anonymat. Nous allons donc proposer une extension du cadre *welfariste* qui va permettre d'intégrer l'inégalité des droits exogènes dans le modèle. Notre démarche est la suivante : nous allons dans un premier temps étendre les définitions d'ordre de bien-être social et de fonction d'utilité collective afin de prendre en compte les droits des agents. Puis nous introduirons une méthode permettant de bâtir des ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collective à droits inégaux à partir de leurs équivalents classiques et d'un vecteur de droits des agents. Enfin, nous proposerons une extension des propriétés classiques introduites à la section 1.3.3, et des fonctions d'utilité collectives classiques introduites à la section 1.3.4, ainsi que l'introduction de nouvelles propriétés liées aux droits inégaux. Cette démarche sera illustrée de nombreux exemples.

Notons, avant d'aborder le sujet des droits inégaux, que ce problème n'est pas sans rappeler un domaine d'étude relativement similaire : celui des indices de pouvoir [Felsenthal et Machover, 1998] en théorie du vote. Le contexte est similaire, mais les questions posées sont différentes : dans le domaine du vote, les principaux travaux sur les indices du pouvoir ne concernent pas la mise au point de la procédure de vote (contrairement à ce que nous cherchons à faire en intégrant les droits exogènes au modèle *welfariste* cardinal), mais plutôt la question de l'attribution des poids aux votants ou encore l'analyse de leur influence sur le résultat du vote. Ce sont par exemple des questions cruciales dans le cadre du conseil de l'Union Européenne, où la répartition des poids de vote aux différents pays suscite un certain nombre de polémiques houleuses.

On peut se demander pourquoi le problème de la généralisation des fonctions d'utilité collective à des droits inégaux n'est pas autant étudié dans la littérature sur le *welfarisme* qu'il ne l'est dans le domaine du vote. La raison que nous voyons à cela est que souvent les problèmes de décision à droits inégaux sont complexes et particuliers, et font l'objet de modèles et travaux dédiés à chacun. C'est le cas des exemples de la constitution de comités, de la banqueroute, des productivités différentes, qui sont des exemples classiques étudiés en tant que tels. Notre démarche se veut plus générale : nous recherchons un cadre permettant d'aborder de manière unifiée ce type de problèmes.

[2]Cet exemple se situe à la limite du cadre des droits exogènes, dans la mesure où la «productivité» d'un agent constitue plutôt une propriété intrinsèque de sa fonction d'utilité, et qu'il interfère avec le principe de récompense. Nous conservons tout de même l'exemple car il entre formellement dans le schéma méthodique proposé et son traitement dans ce cadre apporte une solution tout-à-fait plausible.

2.1 Exemples repères

Par une suite d'exemples, nous allons montrer comment, à partir d'un même contexte d'allocation de ressource entre agents, différentes fonctions d'utilité collective peuvent se justifier. Ces exemples nous permettront d'introduire les droits inégaux de manière concrète. Le contexte est le suivant : une collectivité de fermiers utilise un système commun de distribution d'eau captée. Ils doivent décider ensemble de la quantité d'eau allouée annuellement à chaque fermier, sachant que toutes les distributions ne sont pas admissibles : la quantité d'eau disponible est limitée, les tuyaux sont plus ou moins gros... En fonction de l'attribution annuelle d'eau $(a_1, \ldots a_i, \ldots a_n)$, le fermier i retire une utilité individuelle $u_i = f_i(a_i)$. Cette fonction est propre à chaque fermier car ils ne cultivent pas tous les mêmes plantes, les sols n'ont pas le même rendement, l'exposition au soleil est différente... On suppose que les fermiers ont une capacité de travail identique. On admettra qu'il existe une échelle commune des utilités, et qu'elles sont mesurées par exemple en euros. Nous allons d'abord supposer que nos agents ont des droits égaux, ce qui nous permettra de rappeler les deux fonctions d'utilité collectives les plus importantes introduites au chapitre 1, puis nous examinerons le cas de droits inégaux.

2.1.1 Avec des droits égaux

1. Utilitarisme classique

La collectivité s'intéresse à l'utilité globale produite. La fonction d'utilité collective naturelle est celle qui correspond à la vision utilitariste classique :

$$g^{\star}(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

On note l'aspect interchangeable des utilités individuelles : pour atteindre un haut niveau d'utilité collective, un bas niveau d'utilité produite par une ferme devra être compensé par un bon niveau d'une autre. Un litre d'eau supplémentaire ira au fermier ayant la plus grande utilité individuelle marginale (en supposant que l'utilité individuelle, fonction de la quantité d'eau reçue n'est pas décroissante, et à condition que les contraintes d'admissibilité soient satisfaites). Si l'utilité individuelle représente ou est connectée directement au salaire du fermier, le choix de cette fonction d'utilité collective implique qu'un fermier sera amené à se sacrifier pour la communauté.

2. Égalitarisme

L'utilité individuelle représente le revenu du fermier. La collectivité s'intéresse maintenant à une répartition égalitaire de l'utilité produite par chaque fermier. Une fonction qui convient est celle qui correspond à la vision égalitariste du partage,

$$g^{(e)}(\overrightarrow{u}) = \min_{i=1}^{n} u_i$$

car elle tend à la fois à égaliser les revenus et à les tirer vers le haut. Noter l'absence totale d'interchangeabilité des utilités individuelles : un litre d'eau supplémentaire ira au fermier possédant l'utilité la plus faible, même si ce litre est plus productif en utilité dans une autre ferme. Bien entendu, on pourra utiliser le préordre leximin en lieu et place de la fonction d'utilité collective min pour pallier dans une certaine mesure ses inconvénients.

2.1.2 Avec des droits inégaux

Considérons maintenant que les fermes sont habitées par des familles de tailles inégales. La taille de la famille i sera notée e_i. Il faut en tenir compte dans le choix de l'allocation.

1. Division avec utilitarisme classique

L'utilité représente le revenu de la ferme. Elle est divisée entre chaque habitant individuellement. Chaque habitant reçoit donc u_i/e_i. La collectivité s'intéresse au bien-être collectif mesuré par la somme de ce que reçoivent tous les habitants. La fonction d'utilité collective est donc :

$$g^{\star}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \cdot (u_i/e_i)) = \sum_i u_i$$

2. Division avec égalitarisme

Même cas de figure que dans l'exemple précédent, mais la collectivité s'intéresse à une répartition équitable de l'utilité reçue par chacun des habitants individuellement. Une fonction d'utilité collective convenable est alors :

$$g^{(e)}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \min_{i=1}^{n}(u_i/e_i)$$

3. Indivision avec utilitarisme classique

On change maintenant de point de vue sur l'utilité individuelle. L'utilité u_i caractérise la «prospérité» de la ferme i en tant que propriété indivisible, et mesure en quelque sorte l'agrément d'y habiter. Chaque habitant d'une ferme profite de la prospérité de sa ferme et de celle-ci seulement. Les habitants d'une ferme en jouissent d'une manière équivalente. Chaque habitant de la ferme i reçoit donc l'utilité u_i de manière indivisible. Puis, la collectivité des fermiers s'intéresse à maximiser l'agrément total de tous les habitants, mesurée comme la somme des utilités reçues par les habitants. L'utilité collective est alors la somme pondérée :

$$g^{\star}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{n}(e_i \cdot u_i)$$

4. Indivision avec égalitarisme

Le point de vue est le même que dans l'exemple précédent : l'utilité individuelle caractérise la «prospérité» de la propriété, et chaque habitant de la ferme i reçoit l'utilité u_i. La collectivité s'intéresse maintenant à une répartition équitable entre chacun des habitants individuellement. L'utilité collective convenable est

$$g^{(e)}_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = \min_i u_i$$

Cette série d'exemples illustre la diversité des fonctions d'utilité collective possibles, selon le but poursuivi par la communauté et selon la nature des satisfactions des agents, lorsque les agents sont pourvus de droits inégaux. Dans la suite de l'article, nous chercherons à rendre compte de manière systématique de ces différentes formes, et éventuellement à en proposer de nouvelles.

2.2 Le principe de duplication des agents

Les quatre exemples précédents ont introduit la notion de fonction d'utilité collective à droits exogènes, et ont mis en valeur la façon intuitive de construire une telle fonction d'utilité : par duplication des agents en fonction de leurs droit exogène, et en calculant l'utilité individuelle de ces «sous-agents» à l'aide d'une certaine fonction. Nous allons maintenant introduire ce principe de manière formelle, sous le nom de «principe de duplication des agents». Il nous faut cependant tout d'abord définir ce que l'on entend par «droit exogène».

Définition 2.1 (Vecteur de droits exogènes) *Soit $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents de taille n. Un* vecteur de droits exogènes *est un vecteur $\overrightarrow{e} \in \mathbb{N}_\star^n$.*

Nous nous restreignons donc à des droits exogènes définis par des entiers. Cette hypothèse n'est pas très contraignante en pratique. D'une part il est rare que l'on exprime de manière naturelle des droits par des nombres non entiers, et d'autre part, si les droits sont rationnels[3], la propriété d'insensibilité à une dilatation proportionnelle de l'échelle commune d'expression de ces droits, que nous allons introduire dans la section 2.3.3, nous autorisera à les rendre entiers en les multipliant par un multiple commun à tous leurs dénominateurs.

Par la suite, nous utiliserons aussi la version normalisée du vecteur de droits exogènes, que nous noterons $\overrightarrow{\underline{e}}$. Chaque composante de ce vecteur sera définie de la manière suivante :

$$\underline{e_i} = \frac{e_i}{m}, \text{ avec } m = \sum_{j=1}^{n} e_j.$$

Nous nous devons d'ajouter une précision de première importance concernant le vecteur de droits exogènes. Nous supposons que ce vecteur de droits exogènes a été défini de manière préalable au problème, que tous les agents sont d'accord sur ce vecteur, et qu'il n'est pas remis en cause durant la procédure d'allocation. En d'autres termes, la manière dont a été défini le vecteur ne nous concerne pas ici, mais nous supposons que sa définition est acceptée sans réserve par tous les agents. Cette hypothèse est très importante en particulier pour la définition de l'équité en présence de droits exogènes : les frustrations relatives à la définition des droits elle-même ne peuvent servir de base à la mesure de l'inéquité.

Le *principe de duplication* est un moyen de résoudre le problème de prise de décision collective en présence de droits inégaux. L'idée est de remplacer chaque agent par autant de *clones* qu'il possède de droits (ou d'un nombre de clones proportionnel à ses droits si les droits ne sont pas des entiers), l'utilité reçue par chaque agent étant répartie — d'une manière qui est discutée plus loin — entres ses clones. L'idée est ensuite de se ramener à un problème de décision collective entre les m clones considérés avec des droits égaux. Le raisonnement vise à conférer à chaque agent un «pouvoir de décision» égal ou proportionnel à son droit.

Il semble que ce principe a été introduit pour la première fois dans [Steinhaus, 1948] (cité par [Brams et Taylor, 1996]), et il est repris dans quelques travaux [Brams et Taylor, 1996; Pivato, 2006]. Cependant, il est toujours appliqué dans un contexte de division équitable de ressources, qui conduit à la fonction $\min_i u_i/e_i$, ce qui n'est pas toujours pertinent, comme nous l'avons vu dans les exemples précédents. Nous proposons donc une formalisation du principe de duplication, autorisant une utilisation plus large que celle qu'on lui donne habituellement et faisant intervenir deux paramètres :

▷ la manière dont l'utilité d'un agent est répartie entre ses clones,

▷ l'ordre de bien-être collectif jouant sur la société des clones.

Nous supposerons par la suite que les fonctions d'utilité sont définies sur un espace $\mathscr{V}$ qui correspond à l'espace des rationnels positifs $\mathbb{Q}^+$ ou à l'espace des réels positifs $\mathbb{R}^+$.

Le principe de duplication est fondé sur la notion *fonction de répartition*. Le rôle de cette fonction est de faire correspondre à l'utilité u_i d'un agent i et à son droit e_i l'utilité d'un de ses clones :

[3] Probablement aucune application ne nécessitera l'emploi de nombres réels irrationnels en guise de droits exogènes.

Définition 2.2 (Fonction de répartition) *Une* fonction de répartition *est une fonction* $\div : \mathscr{V} \times \mathbb{N}_\star \to \mathscr{V}$.

Deux fonctions de répartition sont naturelles. D'une part la division ordinaire $u \div e \stackrel{def}{=} u/e$, qui prend son sens dans le cas d'une satisfaction devant être nécessairement divisée entre les clones, c'est-à-dire lorsque les utilités individuelles sont *préemptives*, et d'autre part la simple réplication $u \div e \stackrel{def}{=} u$, qui convient dans le cas d'une satisfaction qui ne s'épuise pas lorsqu'elle est partagée (exemple de la «prospérité» dans les exemples précédents). On notera, pour tout agent i, r_i l'utilité d'un des clones correspondant à l'agent i, soit $r_i = u_i \div e_i$.

Définition 2.3 (Ordre de bien-être social à droits inégaux) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble de n agents, $\overrightarrow{e} \in \mathbb{N}_\star^n$ un vecteur de droits inégaux et $\succeq$ un ordre de bien-être social classique sur $\mathscr{V}^m$. L'*ordre de bien-être social à droits inégaux *$\succeq_{\overrightarrow{e}}$ correspondant à $\succeq$ et à $\overrightarrow{e}$ est défini par le principe de duplication des agents comme un préordre sur $\mathscr{V}^n$ tel que :*

$$\overrightarrow{u} \preceq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div} \preceq \overrightarrow{v} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div}, \text{ avec } \overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div} \stackrel{def}{=} \big(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{e_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{r_n, \ldots, r_n}_{e_n \text{ fois}}\big) \text{ et } r_i = u_i \div e_i.$$

De même, nous pouvons définir la notion de fonction d'utilité collective à droits inégaux selon le principe de duplication des agents

Définition 2.4 (Fonction d'utilité collective à droits inégaux) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble de n agents, $\overrightarrow{e} \in \mathbb{N}_\star^n$ un vecteur de droits inégaux et g une fonction d'utilité collective classique sur $\mathscr{V}^m$. La* fonction d'utilité collective à droits inégaux *$g_{\overrightarrow{e}}$ correspondant à g et à $\overrightarrow{e}$ est définie par le principe de duplication des agents de la manière suivante :*

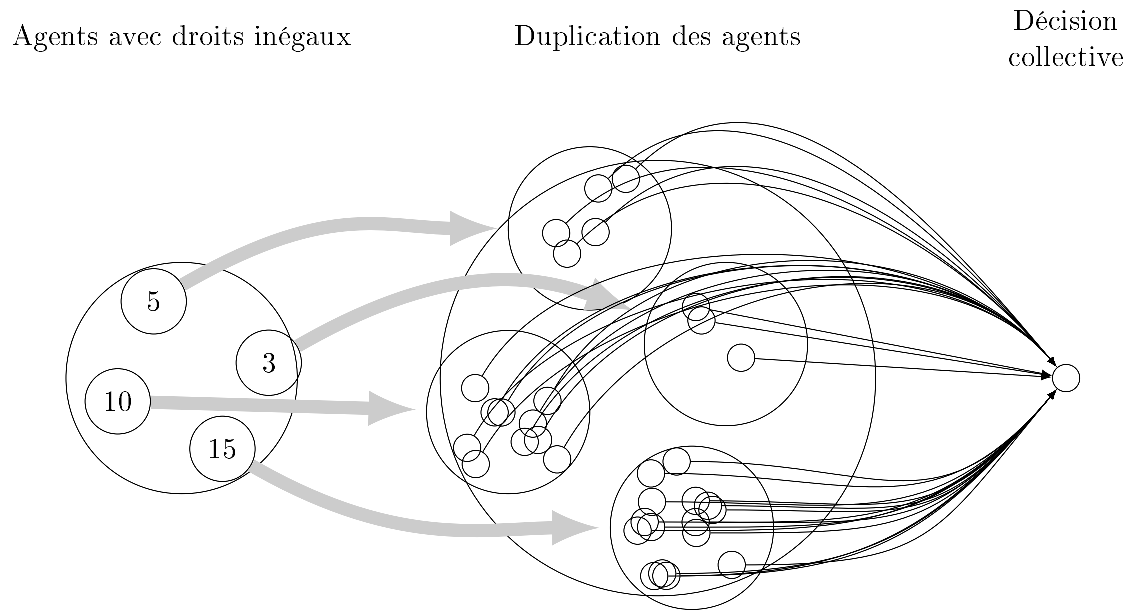
$$g_{\overrightarrow{e}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{V}^n & \to & \mathscr{V} \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & g(\overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div}) \end{array}, \text{ avec toujours } \overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{\div} \stackrel{def}{=} \big(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{e_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{r_n, \ldots, r_n}_{e_n \text{ fois}}\big) \text{ et } r_i = u_i \div e_i.$$

Le processus de prise de décision collective est donc constitué de deux étapes successives : duplication des agents, puis agrégation des utilités des clones. Ce principe est illustré sur la figure 2.1.

Énumérons les quatre fonctions d'utilité collective à droits inégaux qui résultent des deux choix possibles introduits pour $\div$ et pour g dans les exemples repères :

	$u \div e \stackrel{def}{=} u/e$ (division)	$u \div e \stackrel{def}{=} u$ (réplication)
$g \stackrel{def}{=} \sum^{(m)}$ (utilitarisme classique)	$\sum_{i=1}^{n} u_i$	$\sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot u_i)$
$g \stackrel{def}{=} \min^{(m)}$ (égalitarisme)	$\min_{i=1}^{n} (u_i/e_i)$	$\min_{i=1}^{n} u_i$

Nous avons indiqué d'un mot-clé la caractéristique importante de chaque fonction de répartition (division / réplication), et de même pour la fonction d'utilité collective sur les clones (utilitarisme classique / égalitarisme). Les notations $\sum^{(m)}$ et $\min^{(m)}$ rappellent que ces opérateurs portent sur m opérandes. On notera que la fonction d'utilité collective $\min_i(u_i/e_i)$ tend vers l'égalité des rapports u_i/e_i et donc vers la proportionnalité des utilités individuelles par rapport aux droits. On pourra bien entendu utiliser l'ordre social leximin appliqué aux m clones en lieu et place de la fonction min.



$$\left.\begin{matrix}(u_1, e_1)\\ \vdots \\ (u_n, e_n)\end{matrix}\right\} \xmapsto{\;\div\;} \left\{\begin{array}{ccc} r_1 & = & u_1 \div e_1 \\ & \vdots & \\ r_1 & = & u_1 \div e_1 \\ & \vdots & \\ r_n & = & u_n \div e_n \\ & \vdots & \\ r_n & = & u_n \div e_n \end{array}\right\} \xmapsto{\;g\;} \begin{matrix} u_c \\ = \\ g(\overrightarrow{u} \triangleright \frac{\div}{\overrightarrow{e}}) \\ = \\ g_{\overrightarrow{e}}(u_1, \ldots, u_n)\end{matrix}$$

$$(u_1,e_1),\ldots,(u_n,e_n) \xmapsto{\;g_{\overrightarrow{e}}\;} u_c$$

Figure 2.1 — Illustration du principe de duplication des agents.

2.3 Propriétés des ordres sociaux et partages optimaux

L'introduction de droits exogènes inégaux dans le domaine de la prise de décision collective modifie non seulement la notion de fonction d'utilité collective, mais aussi les propriétés raisonnables classiques qui permettent de caractériser ces fonctions d'utilité. Nous allons proposer dans un premier temps une extension des propriétés classiques caractérisant les ordres sociaux et les partages optimaux, afin qu'elles prennent en compte les droits exogènes inégaux. Nous nous intéresserons ensuite plus particulièrement aux propriétés d'équité, dont l'adaptation à ce contexte est légèrement plus délicate. Enfin, nous introduirons quelques nouvelles propriétés dont l'objectif est de caractériser l'effet des droits exogènes sur l'agrégation des préférences individuelles.

2.3.1 Extension des propriétés basiques classiques

La propriété classique fondamentale dont nous avons parlé au chapitre 1 est la propriété d'unanimité, ou en d'autres termes de compatibilité de l'ordre social avec la relation de Pareto. Cette propriété n'est pas influencée par l'introduction des droits exogènes inégaux, et donc son expression reste la même.

L'autre propriété classique dont nous avons parlé, et qui est très souvent requise surtout dans lorsque l'équité est au centre du problème de décision collective, est la propriété d'anonymat. Cette propriété traduit le principe informel selon lequel la qualité d'une décision collective est insensible à l'identité des agents, et s'exprime, dans le cas classique, par la symétrie de l'ordre de bien-être collectif. Cependant, lorsque l'on introduit des droits exogènes inégaux, l'identité d'un agent est révélée non seulement par la place des utilités dans le profil d'utilité, mais aussi par la place des droits dans le vecteur de droits inégaux. La propriété d'anonymat est donc redéfinie comme suit :

Définition 2.5 (Anonymat généralisé) *Soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux. $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété d'*anonymat généralisé *si et seulement si* $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathscr{V}^n \times \mathscr{V}^n$ *, σ permutation de $\mathscr{N}$, et $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \in \mathscr{V}^n \times \mathscr{V}^n$ tels que $\overrightarrow{u}' = (u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)})$ et $\overrightarrow{v}' = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$, on a $\overrightarrow{u} \succeq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}' \succeq_{(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})} \overrightarrow{v}'$.*

La propriété suivante concerne l'indépendance de l'utilité collective vis-à-vis des agents non concernés par une décision (IUA). Rappelons que cette propriété exprime le fait qu'un agent n'étant pas concerné par le choix entre deux décisions — parce que son utilité reste la même entre les deux décisions — ne doit pas être pris en compte pour ce choix. Nous proposons une propriété plus forte dans le cadre des droits inégaux : non seulement l'utilité de l'agent n'influence pas le choix entre les deux décisions, mais son droit exogène non plus.

Définition 2.6 (IUA généralisée) *Un ordre de bien être collectif à droits inégaux $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété d'*indépendance généralisée vis-à-vis des agents non concernés *si et seulement si pour tout quadruplet de profils d'utilité $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ et toute paire de vecteurs de droits $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e}')$ tels que :*

- ▷ *pour un agent i : $u_i = v_i$ et $u'_i = v'_i$,*
- ▷ *pour tout agent $k \neq i$: $u_k = u'_k$, $v_k = v'_k$, et $e_k = e'_k$,*

nous avons :

$$\overrightarrow{u} \preceq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}' \preceq_{\overrightarrow{e}'} \overrightarrow{v}'.$$

$\overrightarrow{e}'$, $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ sont des répliques de $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sauf pour l'agent i. Entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, l'agent i n'est pas concerné car son utilité ne change pas ($u_i = v_i$). De même, cet agent n'est pas concerné par la décision entre $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$, pour la même raison ($u'_i = v'_i$), *même si son droit a pu changer.* Dans ces conditions, si collectivement on préfère $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ sous $\overrightarrow{e}$, alors on doit préférer $\overrightarrow{u}'$ à $\overrightarrow{v}'$ sous $\overrightarrow{e}'$, si la propriété est respectée.

Si cette propriété n'est pas vérifiée, alors le choix entre deux décisions dépendra de l'utilité ou du droit de l'agent i, même si cet agent est complètement indifférent entre ces deux décisions, ce qui intuitivement est non souhaitable.

2.3.2 Équité en présence de droits exogènes inégaux

L'extension des propriétés classiques d'unanimité, d'anonymat et d'indépendance vis-à-vis des agents non concernés introduites précédemment était relativement évidente. Intéressons-nous maintenant aux propriétés relatives à l'équité introduites dans leur version classique dans le chapitre 1. L'extension de ces propriétés est légèrement plus délicate, car la notion d'équité est d'autant plus difficile à formaliser qu'elle est maintenant biaisée par l'introduction de l'inégalité des droits exogènes.

2.3.2.1 Juste part et absence d'envie

La propriété de juste part garantie est celle dont l'extension est la plus immédiate. Dans le cas classique, cette propriété s'appuie sur ce que chaque agent juge comme étant la part qui lui revient de droit, c'est-à-dire qu'il s'attend à obtenir le $n^{\text{ème}}$ de la valeur à laquelle il estime la ressource en entier. En présence d'une inégalité de droits exogènes, tous les agents ne peuvent pas prétendre à la même part de la ressource : la juste part des agents doit être proportionnelle à leur droit. En d'autres termes, la juste part d'un agent i correspond à la fraction $\underline{\overline{e_i}}$ de la valeur à laquelle il estime l'intégralité de la ressource. Si nous prenons l'exemple d'un partage impliquant deux agents dont les droits respectifs sont 1 et 3, leurs justes parts estimées respectives seront $\widehat{u_1}/4$ et $3\widehat{u_2}/4$.

Définition 2.7 (Test de juste part généralisé) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\overrightarrow{e}$ un vecteur de droits exogènes, $\mathscr{A}$ l'ensemble des partages admissibles et $\overrightarrow{\pi}$ un partage. $\overrightarrow{\pi}$ satisfait le* test de juste part généralisé *si et seulement si $\forall i,\ f_i(\pi_i) \geq \underline{\overline{e_i}}\widehat{u_i}$, avec $\widehat{u_i} \stackrel{def}{=} \max\{f_i(\pi_i) | \overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A}\}$.*

Cette propriété de juste part en présence de droits exogènes inégaux découle directement du principe de duplication des agents, appliqué au cas où la fonction de répartition est la division : un partage concernant n agents satisfait le test de juste part avec droits exogènes si et seulement si le partage correspondant aux m clones satisfait le test de juste part classique. Chacun des clones d'un agent i estimant qu'il a au moins le $m^{\text{ème}}$ de la ressource selon son propre point de vue (qui est aussi celui de l'agent i initial), l'agent i estimera qu'il a une fraction de la ressource au moins égale à e_i/m. Cette propriété correspond au principe de proportionnalité introduit pour des droits inégaux dans [Steinhaus, 1948], cité et repris de manière implicite dans [Brams et Taylor, 1996].

Bien entendu, on peut de la même manière étendre la propriété de juste part garantie introduite au chapitre 1 :

Définition 2.8 (Juste part garantie généralisée) *Soient $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\overrightarrow{e}$ un vecteur de droits exogènes, $\mathscr{A}$ l'ensemble des partages admissibles, $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux et $\widehat{\mathscr{A}}$ l'ensemble des solutions non dominées pour cet ordre collectif. Soit $\mathscr{F}_{\overrightarrow{e}} = \{\overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A} | \forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(\pi_i) \geq \underline{\overline{e_i}}\widehat{u_i}\}$. $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ vérifie la propriété de* juste part garantie généralisée *si et seulement si $\mathscr{F}_{\overrightarrow{e}} \neq \varnothing \Rightarrow \widehat{\mathscr{A}} \cap \mathscr{F} \neq \varnothing$.*

Intéressons-nous maintenant à la propriété d'absence d'envie, correspondant dans le cas classique à une certaine vision de l'équité fondée sur la comparaison personnelle (interne à chaque agent) de la propre part d'un agent et de la part des autres agents. À première vue, ce principe est incompatible avec l'idée même d'inégalité des droits exogènes. En effet, si un agent i a un droit beaucoup plus élevé qu'un autre agent j, il ne semble pas anormal qu'il ait une part beaucoup plus importante de la ressource que l'agent j, suscitant ainsi à coup sûr l'envie de cet agent. C'est le sens de la remarque de [Young, 1994] à propos de l'absence d'envie, citée par [Brams et Taylor, 1996] : « [envy-freeness] only applies when the parties have equal claims on the good ».

Cependant, une autre vision de l'absence d'envie est possible dans ce contexte, comme le fait remarquer [Brams et Taylor, 1996], vision qui est encore une fois inspirée du principe de duplication des agents avec fonction de répartition égale à la division. De manière informelle, un partage concernant n agents est sans envie si et seulement si aucun des clones n'envie la part d'un autre clone. Cette propriété a été formalisée de la manière suivante dans [Pivato, 2006] :

Définition 2.9 (Test d'absence d'envie généralisé) *Soit $\mathscr{N}$ un ensemble d'agents, $\overrightarrow{e}$ un vecteur de droits exogènes, et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ l'ensemble de leurs fonctions d'utilités exprimées sur les* *parts et $\overrightarrow{\pi}$ un partage. $\overrightarrow{\pi}$ satisfait le* test d'absence d'envie généralisé *si et seulement si* $\forall i \neq j$:

$$\frac{f_i(\pi_i)}{e_i} \geq \frac{f_i(\pi_j)}{e_j}.$$

Un tel partage sera dit $\overrightarrow{e}$-sans envie.

Autrement dit, tout agent i s'estime plus satisfait relativement à son droit e_i qu'il ne le serait avec la part d'un autre agent j, relativement au droit e_j de cet autre agent.

2.3.2.2 Équité fondée sur l'égalitarisme et droits inégaux

Réduction des inégalités et courbe de Lorenz Si les deux notions précédentes (juste part et absence d'envie) ont déjà été introduites dans la littérature sur le partage, en revanche la plupart des travaux traitant de la mesure des inégalités dans le domaine de la décision collective se limitent au cas classique, c'est-à-dire au cas où les droits exogènes sont égaux. On trouve cependant une exception dans la littérature économique : l'article [Ebert et Moyes, 2002], qui introduit une extension des travaux sur les mesures d'inégalités permettant de prendre en compte une pondération sur les agents[4]. Il est très intéressant de remarquer que ce travail se situe dans un contexte très différent du nôtre, même s'il y a des similarités formelles claires. Alors que l'objectif de notre travail se concentre sur la prise en compte de droits inégaux dans la procédure de partage, le travail de [Ebert et Moyes, 2002] a pour objet la mesure des inégalités *a posteriori* sur un ensemble de revenus relevés dans une population. Les poids ont d'autres significations dans ce contexte : ils sont introduits par exemple pour pallier les faiblesses de la procédure de mesure qui fournit le profil de revenus (échantillonnage non représentatif de la population par exemple, sous-représentativité d'une certaine classe d'individus, etc.). En d'autres termes, alors que dans notre cas les droits exogènes ont un rôle d'*équité*, dans le travail cité les poids ont un rôle *correctif* de l'imperfection de l'information relevée.

Les différences que nous avons mises en valeur entre l'approche de [Ebert et Moyes, 2002] et la nôtre ont deux conséquences. Tout d'abord, rien n'indique, dans le travail de [Ebert et Moyes, 2002], que les profils d'utilité à comparer soient de taille fixe, ni que les poids soient fixés à l'avance. On peut avoir par exemple à comparer deux populations sur la donnée de deux profils de revenus de taille et de vecteurs de poids différents. Autre différence d'approche, chaque «utilité» des profils à comparer dans le travail de [Ebert et Moyes, 2002] correspond au revenu d'un individu d'une certaine classe de personnes : selon notre point de vue de la duplication des agents, ce n'est pas une somme d'argent à partager mais cela représente l'«agrément» d'être dans une classe de la population (la «prospérité», si nous reprenons les termes de la section 2.1.2). Transposé dans notre cadre, le travail de [Ebert et Moyes, 2002] correspond donc à une vision «réplication» de la fonction de répartition, alors que notre approche est fondée sur la fonction «division». Le parallèle est néanmoins intéressant : même si la différence d'approche conduit à des définitions différentes, la démarche est similaire, et les définitions sont équivalentes «à la fonction de répartition près».

Comme pour la juste part et l'absence d'envie, nous allons donc nous inspirer du principe de duplication des agents avec fonction de réplication égale à la division afin de nous ramener au cas classique. La justification est qu'en présence de droits exogènes inégaux, le lieu des profils parfaitement égalitaires correspond à la droite $u_1/e_1 = \cdots = u_n/e_n$, c'est-à-dire aux profils parfaitement égalitaires au sens classique du terme pour les m clones.

Nous inspirant de ce principe, nous pouvons étendre la notion de transfert de Pigou-Dalton en y introduisant les droits exogènes inégaux comme suit :

[4]Nous avons découvert cet article après notre travail sur la formalisation des droits exogènes inégaux ; le parallèle entre cette approche et la nôtre est tout-à-fait intéressant.

Définition 2.10 (Transfert de Pigou-Dalton (réduction des inégalités)) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux profils d'utilité et $\overrightarrow{e}$ un vecteur de droits exogènes. $\overrightarrow{u}'$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{u}$ par* réduction des inégalités généralisée *relativement à $\overrightarrow{e}$, ou* transfert de Pigou-Dalton généralisé *si et seulement si $\exists (i,j) \in \mathscr{N}^2$ tels que :*

▷ $i \neq j$;
▷ $\overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{u_j} = \overrightarrow{u_i}' + \overrightarrow{u_j}'$ *(conservation de la somme) ;*
▷ $\frac{u_i}{e_i} < \{\frac{u'_i}{e_i}, \frac{u'_j}{e_j}\} < \frac{u_j}{e_j}$ *(réduction des inégalités) ;*
▷ $\forall k \in \mathscr{N} \setminus \{i,j\}$, $u_k = u'_k$.

La notion de principe de réduction des inégalités généralisé suit naturellement :

Définition 2.11 (Principe de réduction des inégalités généralisé) *Soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits exogènes. $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ satisfait le* principe de réduction des inégalités généralisé *si et seulement si pour toute paire de profils d'utilité $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ tels que $\overrightarrow{u}'$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{u}$ par transfert de Pigou-Dalton relativement à $\overrightarrow{e}$, on a $\overrightarrow{u} \prec_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{u'}$.*

Voici comment nous interprétons ce principe en présence de droits exogènes inégaux. Dans ce contexte, un transfert de Pigou-Dalton est simplement un transfert réduisant les inégalités entre les clones, avec la contrainte que l'utilité des clones correspondant au même agent initial doit rester la même. Une réduction des inégalités entre les clones de l'agent i et de l'agent j correspond donc à un transfert d'utilité tel que chaque clone de l'agent j donne une utilité de ε/e_j, et chaque clone de l'agent i reçoit une utilité de ε/e_i. Le transfert total d'utilité, correspondant à ε, se fait donc à somme $u_i + u_j$ constante.

Bien entendu, à l'échelle du problème impliquant les m clones, un tel transfert n'est pas un transfert de Pigou-Dalton au sens strict du terme, car en particulier il n'implique pas uniquement deux agents. Cependant, on peut facilement vérifier que tout transfert de ce type peut être obtenu par une séquence de transferts de Pigou-Dalton. Considérons par exemple le cas d'un transfert de Pigou-Dalton avec droits exogènes d'un agent i ayant un droit de 3 vers un agent j ayant un droit de 2. Supposons que l'agent i transfère une utilité ε vers l'agent j. À l'échelle des clones, cela revient à un transfert de $\varepsilon/3$ de chaque clone de l'agent i vers les clones de l'agent j. Ce transfert peut s'effectuer de la manière suivante :

▷ Le clone i_1 transfère $\varepsilon/3$ vers le clone j_1.
▷ Le clone i_2 transfère $\varepsilon/3$ vers le clone j_2.
▷ Le clone i_3 transfère $\varepsilon/6$ vers le clone j_1.
▷ Le clone i_3 transfère $\varepsilon/6$ vers le clone j_2.

Au final, chacun de ces transferts est de type Pigou-Dalton, et le transfert total correspond bien à une réduction des inégalités au sens des droits exogènes inégaux.

Nous pouvons nous appuyer sur cette extension du principe de réduction des inégalités pour définir la notion de courbe de Lorenz avec droits inégaux :

Définition 2.12 (Courbe de Lorenz avec droits inégaux) *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'utilités et $\overrightarrow{e}$ un vecteur de droits inégaux. La* courbe de Lorenz avec droits inégaux *de $\overrightarrow{u}$ est le vecteur :*

$$\overrightarrow{L_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})} = \overrightarrow{L(\overrightarrow{u} \triangleright^{div}_{\overrightarrow{e}})}, \text{ avec } \overrightarrow{u} \triangleright^{div}_{\overrightarrow{e}} \stackrel{def}{=} \big(\underbrace{u_1/e_1, \dots, u_1/e_1}_{e_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{u_n/e_n, \dots, u_n/e_n}_{e_n \text{ fois}}\big).$$

Si $\overrightarrow{L_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})}$ domine $\overrightarrow{L_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})}$ au sens de Pareto, on dira que $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{e}$-Lorenz-domine $\overrightarrow{v}$.

Bien entendu, étant donnée la construction de la notion de courbe de Lorenz à droits inégaux, nous avons toujours l'équivalence entre le fait que $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{e}$-Lorenz-domine $\overrightarrow{v}$ et le fait que $\overrightarrow{u}$ puisse être obtenue à partir de $\overrightarrow{v}$ par une séquence de transferts de Pigou avec droits exogènes et d'améliorations de Pareto.

Le principe de fonctionnement de la dominance de Lorenz en présence de droits exogènes inégaux est illustré sur la figure 2.2. Nous pouvons vérifier d'une part que la droite de parfaite égalité n'est plus la droite $u_1 = u_2$, mais bien la droite $u_1/e_1 = u_2/e_2$, et d'autre part qu'il y a une asymétrie de la zone de réduction des inégalités, en faveur de l'agent ayant le droit le plus élevé : en l'occurrence u_1. L'introduction de droits inégaux dans le principe de réduction des inégalités ne se résume donc pas à une simple dilatation des échelles individuelles d'utilités inversement proportionnelle aux droits inégaux.

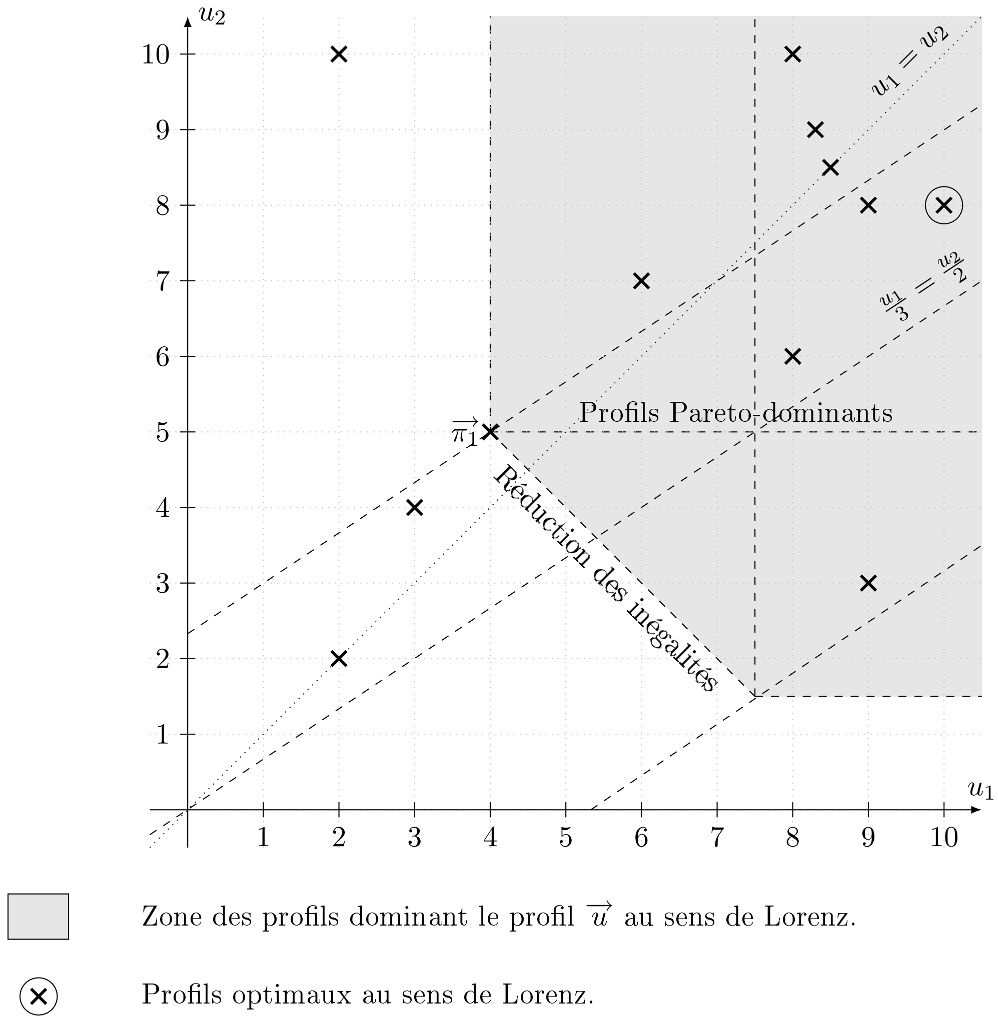


Figure 2.2 — Illustration de la notion de dominance de Lorenz avec droits exogènes inégaux sur des profils d'utilité à deux composantes. Le vecteur de droits exogènes est $(3, 2)$.

Indices d'inégalité Les bases liées à la définition des inégalités étant posées, l'extension de la définition des indices d'inégalité ne pose pas réellement problème :

Définition 2.13 (Indice d'inégalité avec droits exogènes) *Soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux qui respecte le principe de réduction des inégalités avec droits exogènes. Pour chaque vecteur d'utilité positif $\overrightarrow{u}$ on définit l'utilité également distribuée équivalente $\varepsilon_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \in \mathscr{V}$ de la manière suivante : $\varepsilon_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})\cdot(e_1,\ldots,e_n) \sim_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{u}$. On note également $\overline{u \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{div}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n u_i$. L'$\overrightarrow{e}$*-indice d'inégalité *associé à $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ est :*

$$J_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \frac{\varepsilon_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u})}{\overline{u \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{div}}}.$$

Comme dans le cas classique, le fait que l'ordre de bien-être collectif associé à l'indice d'inégalité satisfait le principe de réduction des inégalités assure que $J_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) \geq 0$. Cet indice d'inégalité est nul si et seulement si les composantes de $\overrightarrow{u} \triangleright_{\overrightarrow{e}}^{div}$ sont toutes égales, c'est-à-dire si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est colinéaire au vecteur de droits $\overrightarrow{e}$.

L'extension de la définition de l'indice d'Atkinson se fait grâce au même principe (le détail des calculs est reporté en annexe C).

$$\begin{cases} J_{q,\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) = 1 - \dfrac{m}{n}\left(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^n e_i^{1-q}\left(\dfrac{u_i}{\overline{u}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < 1 \text{ ou } q < 0 \\ J_0(\overrightarrow{u}) = 1 - \dfrac{m}{n}\displaystyle\prod_{i=1}^n \left(\dfrac{u_i}{e_i\overline{u}}\right)^{\overline{e_i}}. & \end{cases}$$

Ces indices d'inégalité sont fondés sur la généralisation de la famille somme des puissances aux droits exogènes inégaux, que nous allons introduire plus loin.

De même, pour l'indice de Gini :

$$\begin{aligned} G_{\overrightarrow{e}}(\overrightarrow{u}) &= \frac{1}{2nm\overline{u}}\sum_{1\leq k,l\leq m} e_k e_l \left|\frac{u_k}{e_k} - \frac{u_l}{e_l}\right| \\ &= 1 - \frac{1}{nm\overline{u}}\sum_{k=1}^n (2m+1-(2E_{k-1}+e_k^{\uparrow\frac{u}{e}})(e_k^{\uparrow\frac{u}{e}}+1))\left(\frac{u_k}{e_k}\right)^{\uparrow\frac{u}{e}}, \end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{x}^{\frac{u}{e}}$ désignant le vecteur des composantes de $\overrightarrow{x}$ réordonnées selon l'ordre des composantes de $\overrightarrow{\frac{u}{e}}$, et $x_k^{\frac{u}{e}}$ désignant la $k^{\text{ème}}$ composante de ce vecteur trié.

L'interprétation de ces trois formes équivalentes de l'indice de Gini est relativement similaire au cas classique. La première forme définit l'aire normalisée entre la courbe de Lorenz généralisée réelle et la courbe de Lorenz généralisée idéale, correspondant à un profil parfaitement égalitaire à l'échelle des clones. La deuxième forme correspond à la somme normalisée des distances entre les utilités des clones, et enfin la troisième forme correspond à une moyenne pondérée ordonnée à l'échelle des clones.

Réduction des inégalités et dominance stochastique Si la notion de réduction des inégalités n'a pas été réellement formalisée à notre connaissance dans le domaine de la décision collective, on peut en revanche effectuer un rapprochement avec la notion de dominance stochastique appliquée à des problèmes de décision entre présence de risque. Nous allons essayer d'introduire de manière très rapide les principales notions de ce domaine, et mettre en valeur le parallèle existant entre la dominance stochastique et la réduction des inégalités en présence de droits exogènes inégaux. L'objectif n'est pas de faire une description exhaustive et détaillée du domaine de la décision en présence de risque (on pourra se référer à des ouvrages tels que [Bouyssou *et al.*, 2006; Gayant, 2001]), mais d'exploiter le parallèle entre ce domaine et celui de la décision collective pour donner un autre éclairage sur la notion d'inégalité en présence de droits exogènes inégaux.

La décision en présence de risque est le sous-domaine de la décision dans lequel le choix se fait entre des alternatives à l'issue incertaine, mais dont la probabilité d'occurrence est connue avec précision[5]. La théorie sous-jacente est donc ici la théorie des probabilités. Nous rappelons quelques définitions essentielles.

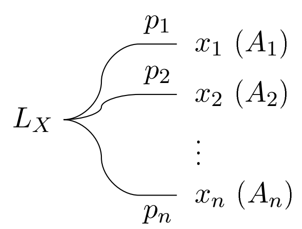
Définition 2.14 (Variable aléatoire discrète) *Soit Ω un espace d'états de la nature fini, et $\mathscr{I}$ un espace d'issues (outcome en Anglais), par exemple $\mathbb{R}$. Une* variable aléatoire discrète *est une fonction $X : \Omega \to \mathscr{I}$.*

Puisque Ω est fini, il existe une partition $(A_1, \ldots, A_n)$ de Ω telle que $\forall i, X(\omega) = x_i$ pour tout $\omega \in A_i$. On note $X = (x_1, A_1; \ldots; x_n, A_n)$.

Lorsque l'on connaît avec précision les probabilités d'occurrence de tous les évènements A_i, on peut assimiler la variable aléatoire X à sa distribution de probabilité, appelée loterie :

Définition 2.15 (loterie) *Étant donnée une variable aléatoire $X = (x_1, A_1; \ldots; x_n, A_n)$ sur un espace Ω, et une mesure de probabilité P sur Ω, on appellera* loterie *associée à X sa distribution de probabilité. Elle sera notée $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$, avec $p_i = P(A_i)$ (et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Nous noterons $\mathcal{L}$ l'ensemble des loteries sur Ω.*

On représente traditionnellement une loterie sous la forme d'un arbre constitué des feuilles correspondant à chaque évènement possible, associé à sa probabilité.



Pour une variable aléatoire discrète, on peut définir les fonctions cumulative et décumulative de probabilité :

Définition 2.16 *Étant donnée une variable aléatoire $X = (x_1, A_1; \ldots; x_n, A_n)$ sur un espace Ω, et une mesure de probabilité P sur Ω, la* fonction cumulative de probabilité *de X, notée F_X, est l'application de $\mathscr{I}$ dans $[0; 1]$ telle que $F_X : x \mapsto P(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x)$. La* fonction décumulative de probabilité *de X est notée G_X et est définie comme suit : $G_X = 1 - F_X$.*

Le modèle à la base du domaine de la prise de décision en présence de risque est fondé sur la notion de relation de préférence d'un agent sur les loteries. Les préférences d'un agent sont simplement représentées par un préordre total sur l'ensemble des loteries $\mathcal{L}$, ou une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathscr{V}$.

Le rapprochement formel entre la décision en présence de risque et la décision collective est connu. Il est fondé sur le parallèle exprimé dans le tableau 2.1 (nous supposons que les probabilités des loteries sont exprimées sous forme de nombres rationnels).

[5] Contrairement au domaine de la décision dans l'incertain, qui concerne les problèmes de décision à l'issue incertaine mais dont on ne sait pas quantifier les probabilités d'occurrence d'évènements.

Issue	Agent
Décision en présence de risque	Décision collective
État de la nature	Décision collective
Loterie	Profil d'utilités
Utilité sur les issues	Utilité individuelle
Utilité sur les loteries	Utilité collective
Probabilité	Pourcentage de population ou droit exogène

Tableau 2.1 — Rapprochement formel entre la décision en présence de risque et la décision collective.

Ainsi, par exemple, une loterie $(10, 1/4; 20, 1/4; 50, 1/2)$ pourra se traduire en terme de décision collective par une décision dans laquelle 1/4 de la population reçoit 10, 1/4 de la population reçoit 20 et la moitié de la population reçoit 50. Ce parallèle va nous permettre d'illustrer la notion d'inégalités dans la décision collective à l'aide des notions de dominance stochastique, issues du domaine des probabilités.

Définition 2.17 (Dominance stochastique du premier ordre) *Soient deux variables aléatoires quelconques définies sur un même ensemble d'états de la nature Ω. Alors X domine la variable Y au sens de la dominance stochastique du premier ordre (que l'on notera $X \succeq_{FOSD} Y$) si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathscr{I},\ P(X > x) \geq P(Y > x).$$

En d'autres termes : $\forall x \in \mathscr{I}$, $G_X(x) \geq G_Y(x)$.

Cela signifie qu'en toute circonstance X est meilleur que Y, c'est-à-dire que pour tout x, la probabilité de gagner au moins x est plus forte avec X qu'avec Y. Transposé au contexte de la décision collective, cela se traduit par le fait que pour tout seuil d'utilité u, le pourcentage de la population (ou le nombre de clones) ayant une utilité supérieure ou égale à u est plus élevé pour $\overrightarrow{\pi}$ que pour $\overrightarrow{\pi}'$.

La relation de dominance stochastique qui nous intéresse plus dans le contexte de la mesure des inégalités est la dominance stochastique du second ordre :

Définition 2.18 (Dominance stochastique du second ordre) *Soient deux variables aléatoires quelconques définies sur un même ensemble d'états de la nature Ω. Alors X domine la variable Y au sens de la dominance stochastique du second ordre (que l'on notera $X \succeq_{SOSD} Y$) si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathscr{I},\ \int_x^{+\infty} P(X > t)dt \geq \int_x^{+\infty} P(Y > t)dt.$$

En d'autres termes : $\forall x \in \mathscr{I}$, $\int_x^{+\infty} G_X(t)dt \geq \int_x^{+\infty} G_Y(t)dt$.

En gros, cela correspond à la notion d'étalement de la distribution de probabilité : plus une distribution est étalée, moins elle est préférée. Remarquons que ce concept n'est pas tout-à-fait identique à la notion d'écart-type : par exemple, les deux distributions de probabilité $(8, 3/4; 12, 1/4)$ et $(10, 1/4; 14, 3/4)$ ont le même écart-type, mais la deuxième distribution domine la première au sens stochastique du second ordre.

Dans le domaine de la décision en présence de risque, on traduit généralement la notion d'*aversion pour le risque* d'un agent à l'aide de cette relation de dominance stochastique. Plus précisément, l'aversion au risque est traduite par la notion d'*étalement à moyenne constante*, fondée sur la dominance stochastique du second ordre :

Définition 2.19 (Étalement à moyenne constante) *Étant données deux variables aléatoires X et Y dont les espérances sont respectivement $E(X)$ et $E(Y)$, on dira que Y se déduit de X par un* étalement à moyenne constante *(noté $X \rightsquigarrow_{MPS} Y$) si et seulement si :*

1. *$E(X) = E(Y)$, et*
2. *$X \succeq_{SOSD} Y$.*

Cette notion traduit une aversion forte pour un accroissement du risque. Dans la définition précédente, la distribution de probabilité de Y est plus «étalée» que celle de X, à espérance identique. Autrement dit, dans une telle loterie, un agent risque de gagner plus, mais il risque aussi de perdre plus. Cette notion est illustrée de manière graphique sur la figure 2.3.2.2.

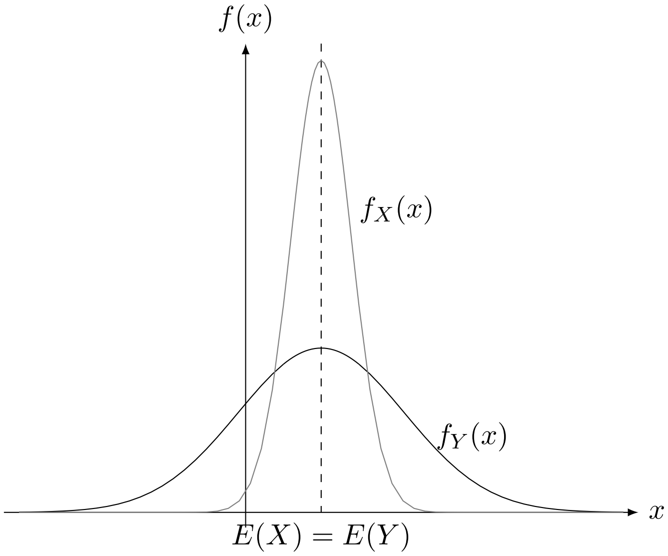


Figure 2.3 — Deux exemples de distributions de probabilité (continues) de fonctions de densité f_X et f_Y. Y est obtenu à partir de X par un étalement à moyenne constante.

Il est encore une fois possible de se ramener au domaine de la décision collective. Cette notion d'aversion au risque correspond formellement à la notion d'aversion à l'inéquité. Un étalement à moyenne constante correspond, dans le domaine de la décision collective, à un transfert d'utilité entre les clones, qui a pour effet d'«étaler» le profil d'utilité, c'est-à-dire d'accroître les inégalités entre les agents. Un tel transfert se fait bien entendu à somme des utilités constante, car l'étalement à moyenne constante se fait à espérance mathématique constante. Il s'agit donc de l'inverse d'un transfert de Pigou-Dalton généralisé (autrement dit, c'est un transfert qui accroît les inégalités).

Ce parallèle nous permet de valider notre approche de l'inégalité en présence de droits inégaux, en la rapprochant de la notion de risque avec des probabilités inégales sur les évènements : cette notion de risque est définie à l'aide du concept d'étalement à moyenne constante, qui correspond de manière formelle à ce que nous avons défini comme étant (l'inverse d') un transfert de Pigou-Dalton généralisé. L'accroissement des inégalités en présence de droits exogènes inégaux correspond donc formellement au concept d'accroissement des risques en présence de probabilités inégales.

2.3.3 Nouvelles propriétés relatives aux droits exogènes

Le concept de droit exogène exprime la simple notion d'influence plus ou moins grande d'un agent sur la décision collective, avec l'idée intuitive qu'un agent doté d'un droit plus grand doit tirer un bénéfice (donc une utilité) plus grand de la décision collective. Cette idée informelle peut se traduire de différentes manières. La propriété la plus simple et la plus évidente requise par l'introduction de droits inégaux est que l'augmentation du droit d'un agent ne peut pas renverser une préférence collective qui déjà l'avantageait.

Définition 2.20 (Conformité) *Soient $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{e}'$ deux vecteurs de droits tels que $e_k = e'_k$ pour tout $k \neq i$, et $e_i < e'_i$, et soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux. Alors $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ vérifie la propriété de* conformité *si et seulement si pour toute paire de profils d'utilité $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a $(\overrightarrow{u} \succeq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v}$ et $u_i > v_i) \Rightarrow \overrightarrow{u} \succeq_{\overrightarrow{e}'} \overrightarrow{v}$.*

Cette définition est plus claire sur un exemple :

Exemple 2.1 Soient $\overrightarrow{u} = (4, 7, 4, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 5, 3, 8)$. Supposons que, pour un vecteur de droits $\overrightarrow{e}$, on ait $\overrightarrow{u} \succeq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v}$. Entre les deux vecteurs, le préféré est celui qui avantage, entre autres, l'agent 2. Maintenant si nous augmentons le droit de l'agent 2 sans modifier celui des autres agents, ce qui nous donne le vecteur $\overrightarrow{e}'$, nous ne pouvons avoir $\overrightarrow{v} \succ_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{u}$, car si tel était le cas, la collectivité préférerait désormais un profil d'utilité qui désavantage maintenant l'agent 2, alors que son droit a augmenté.

L'implication principale de cette propriété concerne le calcul d'une décision collective optimale :

Proposition 2.1 *Soient $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{e}'$ deux vecteurs de droits tels que $e_k = e'_k$ pour tout $k \neq i$, et $e_i < e'_i$, et soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux. Nous notons $\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}} \in \mathrm{argmax}^{\succeq_{\overrightarrow{e}}}_{\overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A}}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\pi}))$ une décision collective optimale selon $\succeq_{\overrightarrow{e}}$. Si $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ satisfait la propriété de conformité, alors il existe une décision collective optimale $\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}'}$ selon $\succeq_{\overrightarrow{e}'}$ telle que $f_i(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}'}) \geq f_i(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}})$.*

En d'autres termes, si l'on augmente le droit relatif d'un certain agent, alors il ne peut pas obtenir au final une utilité moindre qu'avant son augmentation.

> **Démonstration** Si $\max^{\succeq_{\overrightarrow{e}}}_{\overrightarrow{\pi} \in \mathscr{A}}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\pi})) \sim_{\overrightarrow{e}'} \overrightarrow{f}(\widehat{\pi}_{\overrightarrow{e}}))$, alors $\widehat{\pi}_{\overrightarrow{e}}$ est aussi une décision optimale selon $\succeq_{\overrightarrow{e}'}$ et donc la proposition est satisfaite.
>
> Sinon, pour toute décision $\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}'}$ optimale selon $\succeq_{\overrightarrow{e}'}$, on a $\overrightarrow{u}(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}'}) \succ_{\overrightarrow{e}'} \overrightarrow{u}(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}})$. Or, $\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}}$ étant une décision optimale selon $\succeq_{\overrightarrow{e}}$, pour toute décision collective admissible $\overrightarrow{\pi}$ telle que $u_i(\overrightarrow{\pi}) \leq u_i(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}})$, on a $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{\pi}) \preceq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{u}(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}})$. D'après la propriété de conformité, on a donc aussi $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{\pi}) \preceq_{\overrightarrow{e}'} \overrightarrow{u}(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}})$. Par contraposée, on a donc $u_i(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}}) \leq u_i(\widehat{\overrightarrow{\pi}}_{\overrightarrow{e}'})$, ce qui prouve la proposition. ▲

La propriété de conformité est une traduction possible de l'idée selon laquelle les droits inégaux ont un effet «positif» dans le partage : si l'on augmente le droit d'un agent, alors il ne pourra pas être désavantagé. Cette idée d'effet «positif» peut se traduire d'une manière différente : toutes choses étant égales par ailleurs, il vaut mieux choisir la décision qui avantage, entre deux agents ayant des droits inégaux, l'agent ayant un plus grand droit.

Définition 2.21 (Avantage aux droits élevés) *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux profils d'utilité tels que $u_i = v_j$, $u_j = v_i$ et $u_k = v_k$ $\forall k \in \mathscr{N} \setminus \{i, j\}$ ($\overrightarrow{v}$ est égal au profil $\overrightarrow{u}$ dans lequel on a permuté u_i et u_j), avec $u_i > u_j$, et soit $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ un ordre de bien-être collectif à droits inégaux. Alors $\succeq_{\overrightarrow{e}}$* avantage les droits élevés *si et seulement si pour tout $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{v} \preceq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{u} \Leftrightarrow e_i \geq e_j$.*

Cette notion d'avantage aux droits élevés n'est pas équivalente à la propriété de conformité, même si elle exprime une traduction différente de la même idée intuitive. En effet, il existe des fonctions d'utilité collective à droits inégaux qui satisfont la propriété de conformité, sans toutefois vérifier la propriété d'avantage aux droits élevés. La fonction somme non pondérée, correspondant à l'utilitarisme avec division de la ressource, est un exemple d'une telle fonction. L'existence d'un lien d'implication entre l'avantage aux droits élevés et la conformité, éventuellement lié aux autres propriétés (IUA généralisée, anonymat, unanimité), ou aux propriétés analytiques des fonctions d'utilité collective (continuité, ...) n'est pas encore claire.

Une dernière propriété souhaitable des fonctions d'utilité collective prenant en compte des droits exogènes inégaux est leur insensibilité à une dilatation proportionnelle de l'échelle commune d'expression de ces droits inégaux. En d'autres termes, une fonction d'utilité collective à droits inégaux doit classer les décisions de la même manière, que le vecteur de droits soit $\overrightarrow{e}$, $2 \cdot \overrightarrow{e}$ ou bien $100 \cdot \overrightarrow{e}$.

Définition 2.22 (Insensibilité à une dilatation commune des droits (IDCD)) *Soit* $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ *un ordre de bien-être collectif à droits inégaux.* $\succeq_{\overrightarrow{e}}$ *est* insensible à une dilatation commune des droits *(IDCD) si et seulement si* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \overrightarrow{e}$ *vecteur de droits, et pour tout couple* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *de profils d'utilité,* $\overrightarrow{u} \succeq_{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \succeq_{k \cdot \overrightarrow{e}} \overrightarrow{v}$.

2.3.4 Application aux quatre ordres de bien-être social étendus

Nous nous intéressons maintenant à la caractérisation des quatre ordres de bien-être social étendus introduits en section 2.1.2 : l'ordre utilitariste et l'ordre égalitariste leximin, avec les fonctions de répartition division et réplication. La preuve de la proposition suivante est immédiate et ne présente que peu d'intérêt. Nous l'omettrons donc.

Proposition 2.2 *Les fonctions somme, somme pondérée,* leximin *et* leximin *pondéré satisfont les propriétés marquées «oui» dans la table 2.2, et ne satisfont pas les propriétés marquées «non» de cette même table.*

	una.	ano.	IUA	Juste P.	Réd. In.	conf.	ADE	IDCD
$\sum_i e_i \cdot u_i$	oui	oui	oui	**non**	**non**	oui	oui	oui
$\sum_i u_i$	oui	oui	oui	**non**	**non**	oui	**non**	oui
$\text{leximin}_i\, u_i/e_i$	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
$\text{leximin}_i\, u_i$	oui	oui	oui	**non**	**non**	oui	**non**	oui

Tableau 2.2 — Propriétés vérifiées par les fonctions d'utilité collective à droits exogènes inégaux.

2.4 Fonctions d'utilité collective de compromis et droits inégaux

2.4.1 Fonctions somme des puissances

Nous avons introduit au chapitre 1 deux familles de fonctions qui réalisent des compromis entre l'utilitarisme classique et l'égalitarisme pur. Nous allons nous intéresser brièvement à l'extension de la première de ces familles, somme des puissances, aux droits inégaux, en s'appuyant sur les deux fonctions de répartition que nous avons introduites (division et réplication).

Nous avons, pour le cas $u_i \div e_i = u_i/e_i$:

$$g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{u}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} sgn(p) \cdot \left(\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i^{1-p} \cdot u_i^p \right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\frac{u_i}{e_i})^{e_i} \right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

et, pour le cas $u_i \div e_i = u_i$:

$$g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u}) \stackrel{def}{=} \begin{cases} sgn(p) \cdot \left(\dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot u_i^p \right)^{1/p}, & p \neq 0, \\ \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i^{e_i} \right)^{1/m}, & p = 0 \end{cases}$$

On pourra trouver, d'un point de vue pratique, des formes plus agréables aux fonctions ci-dessus, en utilisant la propriété selon laquelle les fonctions d'utilité collective sont significatives à une transformation monotone croissante près.

Il est intéressant de caractériser ces fonctions d'utilité collective à l'aide des propriétés introduites ci-avant. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3 *La fonction d'utilité collective $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}$ vérifie les propriétés suivantes pour tout p : unanimité, anonymat généralisé, IUA généralisée, conformité et IDCD. Pour tout $p < 1$, cette fonction vérifie en plus la propriété d'avantage aux droits élevés et de réduction des inégalités.*

Démonstration Les propriétés d'**unanimité** et d'**anonymat** généralisé sont immédiates. Les démonstrations pour les autres propriétés seront faites pour $p < 0$ uniquement. Les cas $p = 0$ et $p > 0$ se démontrent de manière similaire.
IUA généralisée : soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ quadruplet de profils d'utilité tels que $u_i = v_i$ et $u'_i = v'_i$ pour un agent i et pour tout $k \neq i$, $u_k = u'_k$ et $v_k = v'_k$, et soit $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e}')$ paire de vecteurs de droits telle que $\forall k \neq i$, $e_k = e'_k$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} & g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{u}) \leq g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{v}) \\ & \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} e_k^{1-p} \cdot u_k^p \geq \sum_{k=1}^{n} e_k^{1-p} \cdot v_k^p \\ & \Leftrightarrow \cancel{e_i \frac{u_i^p}{e_i^p}} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} e'_k \frac{u_k'^p}{e_k'^p} \geq \cancel{e_i \frac{v_i^p}{e_i^p}} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} e'_k \frac{v_k'^p}{e_k'^p} \\ & \Leftrightarrow e'_i \frac{u_i'^p}{e_i'^p} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} e'_k \frac{u_k'^p}{e_k'^p} \geq e'_i \frac{v_i'^p}{e_i'^p} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n} e'_k \frac{v_k'^p}{e_k'^p} \\ & \Leftrightarrow g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{u}') \leq g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{v}') \end{aligned}$$

Conformité : Soient $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{e}'$ deux vecteurs de droits tels que $e_k = e'_k$ pour tous $k \neq i$, et $e_i < e'_i$, et soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une paire de profils d'utilité telle que $(g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{u}) \geq g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{v})$ et $u_i >$

v_i). Alors on a :

$$\begin{aligned}
&u_i > v_i \\
&\qquad \Rightarrow (e_i'^{1-p} - e_i^{1-p}) \cdot u_i^p \leq (e_i'^{1-p} - e_i^{1-p}) \cdot v_i^p \\
&\qquad \Rightarrow (e_i'^{1-p} - e_i^{1-p}) \cdot u_i^p + \left(g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{u})\right)^p \\
&\qquad\qquad \leq (e_i'^{1-p} - e_i^{1-p}) \cdot v_i^p + \left(g^{(p)}_{\overrightarrow{e},div}(\overrightarrow{v})\right)^p \\
&\qquad \Rightarrow \left(g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{u})\right)^p \leq \left(g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{v})\right)^p \\
&\qquad\qquad \Rightarrow g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{u}) \geq g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Avantage aux droits élevés : soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux profils d'utilité tels que $u_i = v_j$, $u_j = v_i$ et $u_k = v_k\ \forall k \in N \setminus \{i, j\}$, avec $u_i > u_j$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
&e_i \geq e_j \Leftrightarrow e_i^{1-p} \geq e_j^{1-p} \Leftrightarrow e_i^{1-p} - e_j^{1-p} \geq 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow (e_i^{1-p} - e_j^{1-p}) u_i^p \leq (e_i^{1-p} - e_j^{1-p}) u_j^p \\
&\qquad \Leftrightarrow e_i^{1-p} \cdot u_i^p + e_j^{1-p} \cdot u_j^p \leq e_i^{1-p} \cdot u_j^p + e_j^{1-p} \cdot u_i^p \\
&\qquad \Leftrightarrow e_i^{1-p} \cdot u_i^p + e_j^{1-p} \cdot u_j^p \leq e_i^{1-p} \cdot v_i^p + e_j^{1-p} \cdot v_j^p \\
&\qquad \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} e_k^{1-p} \cdot u_k^p \leq \sum_{k=1}^{n} e_k^{1-p} \cdot v_k^p \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{u}) \geq g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}(\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

IDCD : La propriété d'IDCD est quasiment immédiate. Multiplier tous les droits par k équivaut à multiplier l'utilité collective par k^{1-p}, qui reste un nombre positif, donc ne change pas le sens de variation de la fonction d'utilité collective.
Réduction des inégalités généralisée : Par définition, $g^{(p)}_{\overrightarrow{e}',div}$ vérifie la propriété de réduction des inégalités généralisée si et seulement si $g^{(p)}$ la vérifie au sens classique du terme, ce qui est vérifié pour tout $p < 1$. ▲

Proposition 2.4 *La fonction d'utilité collective $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}$ vérifie les propriétés suivantes pour tout p : unanimité, anonymat généralisé, IUA généralisée, conformité, avantage aux droits élevés et IDCD. En revanche, elle ne vérifie pas la propriété de réduction des inégalités.*

Démonstration La preuve de cette proposition pour le cas est assez similaire à la preuve précédente pour les propriétés d'unanimité, anonymat généralisé, IUA généralisée, conformité, avantage aux droits élevés et IDCD. Nous ne détaillerons donc pas ces cas.

Nous allons cependant montrer que quelque soit p la fonction $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}$ ne vérifie pas la propriété de réduction des inégalités. Nous nous limitons au cas $p \neq 0$ (le cas $p = 0$ est relativement similaire). Considérons un problème à deux agents de droits respectifs e_1 et e_2, tels que $e_1 > e_2$. Considérons les deux profils d'utilité $\overrightarrow{u} = (e_1 + \varepsilon, e_2 - \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, et $\overrightarrow{u}' = (e_1, e_2)$. La transformation du profil $\overrightarrow{u}$ en profil $\overrightarrow{u}'$ est clairement un transfert de Pigou-Dalton généralisé, donc si $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}$ vérifie la propriété de réduction des inégalités, on doit avoir $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u}') > g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u})$.

Nous avons : $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u}') = \frac{1}{m}\left(e_1 \times (e_1 + \varepsilon)^p + (e_2 - \varepsilon)^p\right)^{1/p}$, et $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{m}\left(e_1^{p+1} + e_2^{p+1}\right)^{1/p}$. Or, comme $e_1 > e_2$, nous avons aussi $pe_1^p\varepsilon - pe_2^p\varepsilon > 0$, donc

$e_1^{p+1} + pe_1^p\varepsilon + e_2^{p+1} - pe_2^p\varepsilon > e_1^{p+1} + e_2^{p+1}$. En remarquant que $e_1 \times (e_1+\varepsilon)^p + (e_2-\varepsilon)^p = e_1^{p+1} + pe_1^p\varepsilon + e_2^{p+1} - pe_2^p\varepsilon + O_{\varepsilon \to 0^+}(\varepsilon)$, nous pouvons donc affirmer qu'il est possible de trouver un nombre ε suffisamment proche de 0 tel que $e_1 \times (e_1+\varepsilon)^p + (e_2-\varepsilon)^p > pe_1^{p+1} + pe_2^{p+1}$, donc au final tel que $g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u}') < g^{(p)}_{\overrightarrow{e},rep}(\overrightarrow{u})$. Nous avons donc trouvé un transfert de Pigou-Dalton généralisé qui fait diminuer l'utilité collective, ce qui est contraire à la propriété de réduction des inégalité généralisée. ▲

2.4.2 Moyennes Pondérées Ordonnées Étendues

Si l'extension de la famille somme des puissances s'appuyant sur le principe de duplication des agents n'opposait pas de réelle difficulté, en revanche, l'extension des moyennes pondérées ordonnées est plus problématique. En effet, comment appliquer une fonction d'utilité collective de type moyenne pondérée ordonnée sur n'importe quel profil d'utilité et n'importe quel vecteur de droits exogènes, alors que la définition des moyennes pondérées ordonnées dépend du vecteur de poids, qui a une taille fixe ? La solution que nous proposons pour étendre la famille OWA afin qu'elle prenne en compte les droits inégaux est d'étendre aussi la notion de vecteur de poids :

Définition 2.23 (Vecteur de poids étendu) *Un* vecteur de poids étendu *est une fonction* $w\triangleright : \mathbb{N}_\star \to \bigcup_{k=1}^{+\infty}[0,1]^k$*, telle que :*
- $\triangleright$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{w \triangleright (n)} \in [0,1]^n$,
- $\triangleright$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n w \triangleright (n)_i = 1$ *(condition de normalisation).*

Exemple 2.2 Nous pouvons par exemple définir une famille $w\triangleright^\alpha$ paramétrée par $\alpha > 1$ de vecteurs de poids étendus à vocation «équitable» comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}_\star, \overrightarrow{w \triangleright^\alpha (n)} = (\frac{\alpha^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i}, \ldots, \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i}).$$

Ainsi par exemple, si $\alpha = 2$, le vecteur de poids correspondant à 4 agents est $(8/15, 4/15, 2/15, 1/15)$.

Grâce à cette définition, nous pouvons à présent introduire la famille des moyennes pondérées ordonnées étendue :

Définition 2.24 (Famille OWA étendue) *La famille de fonctions d'utilité collective étendues* moyenne pondérée ordonnée étendue *(ou EOWA pour Extended Ordered Weighted Average) est la famille* $\{g^{w\triangleright}_{\overrightarrow{e},\div}\}$ *paramétrée par un vecteur de poids étendu* $w\triangleright$*, et tel que pour tout vecteur de droits exogènes* $\overrightarrow{e}$ *et tout profil d'utilité* $\overrightarrow{u}$ *:*

$$g^{(w\triangleright)}_{\overrightarrow{e},\div}(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{m} w \triangleright (m)_i \times (u\triangleright\frac{\div}{\overrightarrow{e}})^{\uparrow}_i.$$

Exemple 2.3 (suite) Si nous reprenons le même vecteur de poids étendus que précédemment, nous aurons donc par exemple $g^{w\triangleright^2}(1,3,2,0) = 0 \times 8/15 + 1 \times 4/15 + 2 \times 2/15 + 3 \times 1/15 = 11/15$. On pourra remarquer qu'en faisant tendre α vers $+\infty$, on tend vers une fonction d'utilité collective étendue qui «représente» l'ordre leximin étendu.

2.5 Applications

Dans cette section, nous appliquons le principe de duplication des agents à quelques situations «microéconomiques» dans lesquelles apparaissent naturellement des droits exogènes. Si le choix de la fonction d'utilité collective et de la fonction de répartition sont souvent assez naturels, dans certains cas il peut être discutable. Notre point de vue n'est pas normatif (nous ne cherchons pas à imposer de solution) ; nous cherchons juste à mettre en évidence le pouvoir descriptif du schéma. Notons à nouveau que chaque fois que nous employons la fonction min, on peut bien entendu utiliser le préordre leximin en lieu et place de cette fonction.

Répartition d'un bien vital Une Organisation Non Gouvernementale doit répartir une quantité de riz entre différents pays sinistrés par la famine. Les pays (agents) sont de tailles (droits) différents. L'utilité reçue par un habitant est sa quantité de riz. La fonction de répartition est ici la division. Prenant en compte le caractère de répartition égalitariste suggéré par la nature vitale de la ressource, on conclut à la fonction d'utilité collective $\min u_i/e_i$ (allocation proportionnelle à la taille des populations).

Banqueroute (présenté en début de chapitre) Le cas relève assez clairement de la répartition d'utilité par division d'une part, et d'autre part au point de vue égalitariste sur la préférence collective. Ce qui conduit à la fonction d'utilité collective $\min_i u_i/e_i$. Si l'utilité se mesure directement en monnaie, maximiser cette fonction revient à allouer l'actif proportionnellement aux créances. C'est la solution classiquement proposée pour ce problème, mais d'autres se justifient également (voir par exemple [Young, 1994, chapitre 4]).

Constitution de comité (présenté en début de chapitre) L'utilité reçue par une circonscription est son nombre de représentants, et dans ce cas il y a une exigence égalitariste sur la préférence collective (égalité de représentation pour chaque habitant). Pour ce qui est de la fonction de répartition, la division semble la plus sensée (un représentant partage son temps entre les habitants de sa circonscription), ce qui conduit encore à la fonction d'utilité collective $\min_i u_i/e_i$, c'est-à-dire à une allocation tendant vers la proportionnalité du nombre de représentants par rapport aux populations, «tendant vers», car la difficulté de ce problème tient au fait que la proportionnalité exacte peut rarement être atteinte, du fait que le nombre de représentants est entier. Maximiser la fonction $\min_i u_i/e_i$ revient alors à une attribution des sièges selon la méthode de John Quincy Adams, dite du plus petit diviseur (voir [Balinski et Young, 2001, appendix A, proposition 3.10], qui donne aussi d'autres solutions pour ce problème).

Ressource commune avec différents investissements initiaux (présenté en début de chapitre, correspond au problème de partage de la constellation de satellites Pléiades) L'exploitation en commun d'une ressource correspond intuitivement à la division de la ressource entre les agents, et l'équité suggérée par la nature du problème implique de manière naturelle la fonction d'utilité collective égalitariste. Nous avons donc encore une fois affaire à la fonction d'utilité collective $\min_i u_i/e_i$ (allocation proportionnelle à la hauteur de l'investissement).

Productivités différentes (présenté en début de chapitre) Chaque agent est ici remplacé par un ensemble de clones tous également productifs, la production d'un agent étant la somme de la production de ses clones (fonction de répartition division). Le problème est utilitariste classique, car peu importe ce que produit chaque agent en particulier, seule la production totale compte, ce qui nous donne une fonction d'utilité collective $\sum u_i$.[6]

Prix du kWh Une compagnie distributrice d'électricité doit fixer un prix de vente du kWh d'énergie électrique pour les utilisateurs de son réseau. Ces utilisateurs sont réunis en communes (les agents), et le prix de vente fixé pour une commune constitue une désutilité (utilité négative) identique u_i pour tous les habitants de cette commune, donc la fonction de répartition entre les «clones» d'une même commune est la réplication. La répartition du coût doit être égalitariste, car il s'agit d'un bien public indispensable. La fonction d'utilité à considérer est donc $\min_i u_i$: la taille de la commune (donc le droit exogène) n'importe pas.

Infrastructures collectives Un nombre limité d'infrastructures collectives, plutôt de loisirs, doit être alloué à un certain nombre de villes (agents) ayant des populations de tailles différentes (droits). Soit k_i le nombre d'infrastructures allouées à la ville i. L'utilité de la décision k pour la ville i est $f_i(k_i)$. S'agissant d'un équipement de loisir, on peut mesurer l'utilité collective par la somme des satisfactions de chaque habitant. Si l'on admet que tous les habitants de la ville i jouissent d'une manière égale de la présence des k_i théâtres de la ville, alors l'utilité de chaque habitant (clone) est aussi $f_i(k_i)$ (réplication). Selon ce raisonnement, la fonction d'utilité collective qu'il convient de maximiser est $\sum_i (e_i \cdot u_i)$. Si maintenant l'équipement collectif n'avait pas un caractère de loisir mais de bien vital — comme un hôpital —, nous serions plutôt dans le cas (égalitarisme / réplication) et la fonction d'utilité collective convenable serait $\min_i u_i$.

La radio n groupes (nos n agents) partagent un espace commun doté d'un poste de radio pouvant diffuser n stations différentes. Les e_i (droits) membres du groupe i sont tous amateurs de la station i, et de celle-ci seulement. Il faut donc décider de la façon de partager le temps de diffusion du poste entre les n stations. Nous notons x_i la fraction de temps de diffusion dédiée à la station i ($\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$) : nous considérerons que l'utilité de l'agent/groupe i est égale à x_i. Ici l'équité est primordiale, donc l'égalitarisme s'impose. En revanche le choix de la fonction de répartition est sujet à deux interprétations, ce qui rend l'exemple intéressant.

La première interprétation est que l'on partage du temps de «satisfaction» : un agent écoutant sa station préférée pendant un temps x_i sera satisfait à hauteur de x_i. C'est un cas de réplication, donnant la fonction d'utilité collective $\min_i u_i = \min_i x_i$: on alloue un temps de diffusion égal pour chaque station, sans se soucier du nombre d'amateurs de la station i. La seconde interprétation est que l'on partage le temps pendant lequel un groupe peut choisir sa station préférée, et dans ce cas, l'utilité x_i d'un agent est divisible entre ses clones (chaque clone peut choisir sa station préférée pendant un temps x_i/e_i) : la fonction de répartition est la division, ce qui aboutit à la fonction d'utilité collective $\min_i u_i/e_i = \min_i x_i/e_i$. Maximiser cette fonction revient à allouer un temps de diffusion proportionnel au nombre d'amateurs d'une station.

Cet exemple a été traité sans l'aide de droits exogènes inégaux dans la littérature (voir [Moulin, 2003, page 79]), de la manière suivante : les agents correspondent à l'ensemble des individus impliqués dans le partage de la radio (nos clones), l'utilité d'un agent amateur d'une station i étant la fraction x_i. Dans ce contexte, la fonction d'utilité collective utilitariste classique est difficilement justifiable : elle suggère de ne diffuser que la station qui recueille le plus d'amateurs. La fonction égalitariste est celle qui correspond à notre première solution, et résulte en un partage qui égalise le temps de diffusion de toutes les radios ($x_i = 1/n$). [Moulin, 2003] propose un compromis entre ces solutions

[6] Les droits n'ont en réalité pas «disparu», car ils apparaissent de manière cachée dans les fonctions $u_i(a_i)$. On trouve un exemple analogue dans [Moulin, 1988, page 21], traité sans l'aide des droits inégaux.

plutôt extrêmes (soit le groupe le plus nombreux impose son choix pour toute la durée de la diffusion, soit on ne tient pas du tout compte du nombre d'amateurs de chaque station), en utilisant la fonction d'utilité collective de Nash (qui s'écrit $g^\star(\overrightarrow{u}) = \prod u_i$ comme nous l'avons vu). Maximiser cette fonction revient, dans le problème de la radio, à résoudre le problème d'optimisation sous contrainte suivant : $\max_{\overrightarrow{x}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{e_i}$, avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Ce problème d'optimisation classique peut être résolu analytiquement en utilisant la méthode de Lagrange, et il admet comme solution : $x_i = e_i/n$. Cette solution alloue un temps de diffusion proportionnel au nombre d'amateurs d'une station, ce qui correspond exactement à notre seconde solution (égalitarisme, division). Notons que cette solution correspond au principe de la «dictature aléatoire» : chaque agent impose son point de vue aux autres pendant une fraction $1/m$ du temps total.

2.6 Droits inégaux ordinaux

Si dans de nombreux problèmes, à l'instar de ceux présentés dans cet article, l'inégalité des droits exogènes est représentée par un vecteur de nombres de manière naturelle (différence d'investissement, populations de différentes tailles...), en revanche, dans certains autres problèmes, cette inégalité entre les agents se manifeste simplement sous la forme d'un simple ordre d'importance ou de priorité. Ainsi par exemple, dans un comité, l'avis d'un agent ayant plus d'expérience ou plus d'ancienneté comptera plus que l'avis d'un autre agent, sans qu'il ne soit vraiment possible à première vue d'associer des droits exogènes numériques cardinaux aux agents. Lors de l'allocation d'organes à des patients en attente de greffe, le choix des malades à transplanter s'effectue en fonction de listes de priorité, mais il n'est pas possible en général de transcrire ces priorités sous forme numérique [Young, 1994]. On peut envisager deux approches différentes de ce type de problèmes :

- ▷ une approche fondée sur une transcription numérique de l'ordre de priorité et une application du principe de duplication des agents au vecteur de droits obtenus par transcription ;
- ▷ une approche fondée directement sur l'ordre de priorité.

La transcription numérique d'un ordre de priorité entre les agents pose quelques problèmes, même si ce ne sont pas tout à fait les mêmes, que ceux qui concernent la transcription de préférences ordinales en préférences cardinales. La transcription numérique de l'ordre de priorité joue sur l'influence que l'on veut donner à ces droits sur le partage.

Lorsque l'on ne souhaite pas transcrire numériquement l'ordre de priorité, on peut envisager des méthodes pour l'intégrer tel quel dans le processus de décision. Un exemple de tel problème apparaît à un certain niveau dans le problème de partage de la constellation Pléiades [Lemaître *et al.*, 2004]. Dans ce problème, le partage s'effectue en deux phases : phase α, dite prioritaire, et phase β, dite routine. Ces deux phases correspondent à un ordre de priorité entre les agents, les agents militaires participant seuls à la phase α, et les agents civils participant seuls à la phase β.

Nous allons proposer dans cette section quelques méthodes intuitives pour prendre en compte des droits exogènes sous la forme d'un ordre de priorité entre les agents, dans un contexte *welfariste*. En particulier, nous allons envisager deux méthodes. Ces deux méthodes correspondent à deux visions extrêmes de la manière dont l'ordre de priorité influe sur le partage. Nous considérerons dans toute la suite qu'un ordre de priorité est un préordre total sur les agents : tous les agents sont ordonnés, mais on admet que plusieurs agents se situent au même niveau de priorité.

2.6.1 Méthode forte

La première méthode (méthode forte) considère l'ordre de priorité comme un critère prédominant dans le processus de décision collective. En particulier, ce critère prend le pas sur le critère dicté par la fonction d'utilité collective. En d'autres termes, la prise de décision se passe en plusieurs phases.

- ▷ On limite le problème aux agents de la plus haute classe de priorité, et on cherche l'ensemble de décisions qui maximisent la fonction d'utilité collective.
- ▷ Si cet ensemble ne contient qu'un élément, c'est la décision optimale (on ne tient pas du tout compte des autres agents). Sinon, on restreint l'ensemble des décisions admissibles $\mathscr{A}$ à cet ensemble de décisions optimales pour la première phase, et on maximise à nouveau la fonction d'utilité collective, en incluant cette fois-ci les agents situés au deuxième niveau de priorité.
- ▷ On raffine la sélection à chaque étape en incluant les agents de priorité directement inférieure, jusqu'à obtenir une décision unique.

Cette méthode est pertinente uniquement dans les problèmes pour lesquels les premières phases laissent de nombreuses décisions *ex-aequo*, en d'autres termes si les agents les plus prioritaires sont indifférents entre de nombreuses décisions. L'exemple typique d'un tel problème est un problème de partage dans lequel les agents ne convoitent qu'une petite partie de la ressource : après que les agents les plus prioritaires se sont partagés la partie de la ressource qu'ils convoitent, ils sont indifférents à l'attribution du reste de la ressource aux autres agents.

Exemple 2.4 Soit un problème de partage entre quatre agents. La relation de priorité entre les agents est la suivante : $\{1, 2\} \succ_{prio} \{4\} \succ_{prio} \{3\}$. On suppose que les seuls profils d'utilité correspondant à des solutions possibles sont les suivants : $(5, 5, 4, 10)$, $(2, 8, 4, 3)$, $(6, 4, 10, 5)$, $(5, 3, 8, 9)$ et $(2, 3, 18, 2)$. On suppose de plus que le critère de bien-être collectif utilisé est la somme (l'utilitarisme).

Pour calculer le meilleur profil d'utilités en utilisant l'ordre de bien-être collectif à forte priorité, on commence par restreindre la prise de décisions aux agents les plus prioritaires, c'est-à-dire 1 et 2. Les meilleurs profils pour ces deux agents sont $(5, 5, 4, 10)$, $(2, 8, 4, 3)$ et $(6, 4, 10, 5)$, produisant tous trois une utilité collective de 10 pour 1 et 2. Ensuite, on ajoute 4 (l'agent qui vient directement après dans l'ordre de priorité) pour départager ces trois profils. Le premier profil $(5, 5, 4, 10)$ est très clairement le meilleur parmi ces trois.

2.6.2 Méthode faible

La deuxième méthode possible est une méthode faible, pour laquelle l'ordre de priorité est uniquement considéré comme un critère qui départage les *ex-aequo*. Ici encore, la prise de décision se déroule en plusieurs phases :

- ▷ On cherche l'ensemble des décisions qui maximisent la fonction d'utilité collective avec tous les agents.
- ▷ S'il reste des *ex-aequo*, on enlève les agents les moins prioritaires, on limite l'ensemble des décisions admissibles à l'ensemble des décisions optimales précédentes et on cherche à maximiser la fonction d'utilité collective.
- ▷ On raffine la sélection à chaque étape en excluant les agents de priorité la plus basse, jusqu'à obtenir une décision unique.

Cette méthode est pertinente dans les problèmes pour lesquels les préférences des agents sont très différentes, et pour lesquels il existe un certain nombre de décisions optimales qu'il est impossible de départager et qui avantagent toutes des agents différents.

Exemple 2.5 (suite) On commence par comparer les profils d'utilité pour la totalité des agents. $(6, 4, 10, 5)$, $(5, 3, 8, 9)$ et $(2, 3, 18, 2)$ sont les profils qui donnent la plus forte utilité collective (25). Ensuite, on enlève 3 du partage, car c'est l'agent le moins prioritaire. Sur les deux profils restants, $(5, 3, 8, 9)$ est clairement le meilleur du point de vue de 1, 2 et 4.

On peut envisager des méthodes intermédiaires de décision entre ces deux procédés extrêmes. Nous proposons par exemple de limiter l'ensemble des décisions admissibles lors des premières phases, afin de permettre aux agents les moins prioritaires d'influer plus sur le processus de décision. Dans le cadre du partage de ressource commune, cela peut se traduire par la limitation de la quantité de ressource disponible pour le partage lors de la première phase, et l'augmentation progressive de cette limite jusqu'à partager toute la ressource lors de la dernière phase.

2.7 Conclusion sur les droits exogènes inégaux

Ce chapitre constitue le point de départ d'une réflexion générale sur la prise en compte de droits exogènes inégaux. Nous avons proposé un cadre général pour bâtir des ordres de bien-être social et des fonctions d'utilité collective prenant en compte des droits exogènes inégaux. De plus, nous avons introduit un certain nombre de fonctions d'utilité collective à droits inégaux, et caractérisé ces fonctions à l'aide de propriétés nouvellement introduites. Nous avons en outre proposé quelques pistes pour la prise en compte de droits inégaux sous forme d'ordres de priorité. Il reste de nombreux travaux à accomplir, notamment en ce qui concerne la recherche de propriétés des ordres de bien-être collectif à droits inégaux, du lien entre ces propriétés, et de la caractérisation de ces ordres de bien-être social à l'aide de ces propriétés. En outre, les pistes introduites dans le domaine des droits inégaux ordinaux restent entièrement à explorer.

Une autre piste reste entièrement à explorer : celle de la généralisation de la fonction de répartition de manière à établir des compromis entre pure division et pure réplication. On peut se demander quel sens donner à cette généralisation de la fonction de répartition. Nous pouvons citer l'exemple suivant, en guise de point de départ. Dans l'exemple des infrastructures collectives (allocations de théâtres ou d'hôpitaux), nous avons admis que la fonction de répartition est la réplication, dans la mesure où c'est le simple fait d'exister qui permet au théâtre ou à l'hôpital d'apporter une utilité non divisée à chaque habitant. Si maintenant le théâtre ou l'hôpital est trop petit pour la ville, la fonction de répartition glisse plutôt vers la division (car tout le monde ne pourra pas en profiter en même temps quand il en a envie), et c'est à ce moment-là que des compromis pourraient être envisageables.

D'une manière plus générale, on pourrait poursuivre ces travaux sur les droits exogènes inégaux en proposant une axiomatique des ordres de bien-être social et fonctions d'utilité collective à droits exogènes inégaux, fondée par exemple sur les propriétés introduites dans ce chapitre. Une telle axiomatique pourrait éventuellement s'appuyer sur le parallèle avec les notions de dominance stochastique dans les problèmes de décision en présence de risque.

Nous n'aborderons que très peu le problème des droits exogènes inégaux dans les prochains chapitres. Cela ne sera pas nécessaire, car le modèle que nous allons définir au chapitre 3 sera assez générique pour intégrer la prise en compte de ces droits inégaux dans la fonction de répartition. Nous avons maintenant à notre disposition quelques outils formels permettant de réaliser cette intégration.