Chapitre 4
Complexité du problème de partage

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'introduction de la représentation compacte dans les problèmes de partage est un moyen remarquable de concilier la concision et l'expressivité dans la spécification des contraintes et des préférences. Cependant, l'emploi d'un langage d'expression compacte pose une question cruciale : celle de la complexité du problème de partage spécifié de cette manière. Jusqu'ici, les aspects liés à la complexité théorique des problèmes de partage n'ont été majoritairement étudiés que dans deux contextes précis : celui des enchères combinatoires, et celui de la négociation [Endriss et Maudet, 2004; Chevaleyre *et al.*, 2004; Dunne *et al.*, 2005]. En revanche, la complexité du problème de partage équitable de biens indivisibles n'a jusqu'à ce jour jamais été étudiée à notre connaissance, sauf dans [Lipton *et al.*, 2004], qui traite de l'existence de schémas d'approximation pour le problème de minimisation de l'envie dans une instance du problème de partage avec préférences additives.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser en détail à la complexité des deux problèmes introduits dans le chapitre précédent. Le premier problème est lié à la recherche de partages efficaces et sans envie en présence de préférences dichotomiques exprimées sous forme logique et sans autre contrainte que la contrainte de préemption. Le second problème concerne la maximisation de l'utilité collective, définie comme l'agrégation des utilités individuelles elles-mêmes définies par des formules logiques pondérées, le tout en présence de contraintes exprimées sous forme logique. Ces résultats ont été publiés respectivement dans [Bouveret *et al.*, 2005a,b] et [Bouveret et Lang, 2005].

Nous supposerons dans ce chapitre que les notions de base de la théorie de la complexité sont connues du lecteur, ainsi que quelques-unes des classes de problèmes les plus courantes. L'annexe A rappelle quelques notions et définitions de base nécessaires à la compréhension du chapitre ; on pourra de même consulter avec profit les ouvrages de référence tels que [Papadimitriou, 1994; Garey et Johnson, 1979].

4.1 Existence d'une allocation efficace et sans-envie

4.1.1 Complexité du problème EEF avec préférences dichotomiques

4.1.1.1 Le problème général

Intéressons nous à la complexité du problème d'existence d'une allocation Pareto-efficace et sans envie, tel qu'il a été défini dans la section 3.3.1.3, et que nous noterons [EEF EXISTENCE]. Nous avons vu dans la proposition 3.6 de la page 120 que l'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie dans ce langage pouvait se ramener au complémentaire d'un problème d'inférence sceptique en logique des défauts. La complexité de ce problème est bien connue [Gottlob, 1992] : il est Π_2^{p}-complet. Cela a pour implication immédiate que le problème d'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie est dans Σ_2^{p}. Nous allons maintenant démontrer que ce problème est complet pour cette classe, ce qui est moins évident, et ce, même si les préférences sont monotones. Afin de prouver la difficulté du problème, nous utiliserons la restriction suivante du problème d'inférence sceptique :

Problème 2: [RSI] (Restricted Skeptical Inference)

INSTANCE :	Un ensemble de formules propositionnelles $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
QUESTION :	Tous les ensembles maximaux-consitants de Δ contiennent-ils α_1 ?

Proposition 4.1 *Le problème [RSI] est Π_2^{p}-complet.*

Démonstration L'appartenance à Π_2^{p} vient facilement du fait que le problème [RSI] est une restriction du problème d'inférence sceptique général, pour laquelle la formule φ à inférer est simplement α_1. La difficulté vient du fait que pour chaque instance (Δ, β, ψ) du problème d'inférence sceptique on a $(\Delta, \beta) \mathrel{|\!\!\sim^{\forall}} \psi$ si et seulement si $(\{\psi\} \cup \Delta, \beta) \mathrel{|\!\!\sim^{\forall}} \psi$, si et seulement si $(\{\psi \wedge \beta\} \cup \{\alpha_1 \wedge \beta, \ldots, \alpha_n \wedge \beta\}, \top) \mathrel{|\!\!\sim^{\forall}} \psi$, si et seulement si tous les sous-ensembles maximaux β-consistants de $\{\psi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ contiennent ψ, ce qui est une instance de [RSI]. ▲

Proposition 4.2 *Le problème [EEF EXISTENCE] qui consiste à déterminer s'il existe un partage efficace et sans envie pour une instance donnée $\mathcal{P}$ du problème de partage avec des préférences monotones dichotomiques sous forme logique est Σ_2^{p}-complet.*

La difficulté sera prouvée à l'aide de la réduction suivante depuis le problème $\overline{\text{[RSI]}}$ (le problème complémentaire de [RSI], c'est-à-dire, existe-t-il un sous-ensemble maximal consistant de Δ qui ne contient pas α_1 ?) vers le problème [EEF EXISTENCE]. Étant donné un ensemble fini Δ de formules propositionnelles, on notera par la suite $V_\Delta = Var(\Delta)$ l'ensemble des symboles propositionnels apparaissant dans Δ. Soit $\mathcal{P}(\Delta) = (\mathscr{N}, \mathscr{O}, \Phi_{\mathcal{P}(\Delta)})$ l'instance suivante de [EEF EXISTENCE] :

1. $\mathscr{N} = \{1, 2, ..., n+3\}$;
2. $\mathscr{O} = \{\mathbf{v^i} \mid \mathbf{v} \in V_\Delta, i \in 1...n\} \cup \{\bar{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}} \mid \mathbf{v} \in V_\Delta, i \in 1...n\} \cup \{\mathbf{x^i} \mid i \in 1...n+1\} \cup \{\mathbf{y}\}$;
3. pour tout $i = 1, \ldots, n$, soit β_i la formule obtenue à partir de α_i par la séquence d'opérations suivante : (i) mettre α_i sous forme NNF (soit α'_i le résultat) ; (ii) pour tout $\mathbf{v} \in V_\Delta$, remplacer, dans α'_i, chaque occurrence (positive) de $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v^i}$ et chaque occurrence de $\neg\mathbf{v}$ par $\bar{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}$; β_i est la formule obtenue. Alors :
   - ▷ pour $i = 1, \ldots, n$, $\varphi_i = \beta_i \wedge \mathbf{x^i}$,
   - ▷ $\varphi_{n+1} = \left(\left(\bigwedge_{\mathbf{v} \in V_\Delta} \left(\bigwedge_{i=1}^n \mathbf{v^i}\right) \vee \left(\bigwedge_{i=1}^n \bar{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}\right)\right) \wedge \mathbf{x^{n+1}}\right) \vee \mathbf{y}$,
   - ▷ $\varphi_{n+2} = \mathbf{y}$,
   - ▷ $\varphi_{n+3} = \varphi_1$.

Nous allons maintenant prouver la proposition 4.2 à l'aide de plusieurs lemmes.

Lemme 2 *Une allocation $\overrightarrow{\pi}$ pour $\mathcal{P}$ est dite* régulière *si et seulement si pour tout $i \leq n+3$, $\pi_i \subseteq \sigma(i)$, où*
- ▷ *pour tout $i \leq n$, $\sigma(i) = \bigcup_{\mathbf{v} \in V_\Delta} \{\mathbf{v^i}, \bar{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}\} \bigcup \{\mathbf{x^i}\}$;*
- ▷ *$\sigma(n+1) = \bigcup_{\mathbf{v} \in V_\Delta, i=1,\ldots,n} \{\mathbf{v^i}, \bar{\mathbf{v}}^{\mathbf{i}}\} \bigcup \{\mathbf{x^{n+1}}, \mathbf{y}\}$;*
- ▷ *$\sigma(n+2) = \{\mathbf{y}\}$.*
- ▷ *$\sigma(n+3) = \sigma(1)$.*

Étant donnée une allocation $\overrightarrow{\pi}$, soit maintenant $\overrightarrow{\pi}^R$ définie par $\pi_i^R = \pi_i \cap \sigma(i)$. Alors

1. *$\overrightarrow{\pi}_R$ est régulière ;*
2. *$\overrightarrow{\pi}$ est efficace si et seulement si $\overrightarrow{\pi}^R$ est efficace ;*
3. *si $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie alors $\overrightarrow{\pi}^R$ est sans envie.*

Démonstration L'affirmation (1) est évidente. Pour tout i, aucun des biens qui ne sont pas dans $\sigma(i)$ n'a d'influence sur la satisfaction de i (puisque ces biens n'apparaissent pas dans φ_i), donc $\pi_i^R \sim_i \pi_i$, d'où l'on peut déduire (2). Les formules φ_i étant positives, les relations de préférence $\succeq_i$ sont monotones, donc on a $\pi_j \succeq_i \pi_j^R$ pour tout (i, j). Maintenant, si $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie, alors pour tout (i, j) on a $\pi_i \succeq_i \pi_j$, donc $\pi_i^R \sim_i \pi_i \succeq_i \pi_j \succeq_i \pi_j^R$ et donc $\overrightarrow{\pi}^R$ est sans envie, d'où (3). ▲

Lemme 3 *Si l'allocation $\overrightarrow{\pi}$ est régulière alors*

1. *1 ne peut envier que $n+3$;*
2. *$n+3$ ne peut envier que 1 ;*
3. *$2, \ldots, n$ n'envient personne ;*
4. *$n+1$ ne peut envier que $n+2$;*
5. *$n+2$ ne peut envier que $n+1$;*

Démonstration Tout d'abord, remarquons que pour tout i, $j \neq i$, i envie j si et seulement si $\pi_i \vDash \neg\varphi_i$ et $\pi_j \vDash \varphi_i$.

1. Soient $i = 1$ et $j \in \{2, \ldots, n, n+2\}$. Si 1 envie j, alors $\mathbf{x^1} \in \pi_j$. $\overrightarrow{\pi}$ étant régulière, $\mathbf{x^1} \notin \pi_j$, donc i ne peut envier j.
2. Puisque $\varphi_{n+3} = \varphi_1$, la même affirmation est valable pour $n+3$.
3. Soient $i \in \{2, \ldots, n\}$ et $j \neq i$. Si i envie j alors $\pi_j \vDash \beta_i \wedge \mathbf{x^i}$, ce qui est impossible car $\mathbf{x^i} \notin \pi_j$, à cause de la régularité de π.
4. Supposons que $n+1$ envie j pour $j \in \{1, \ldots, n, n+3\}$. Alors $\pi_j \vDash \varphi_{n+1}$. Puisque $\pi_j \vDash y$ est impossible (car $\overrightarrow{\pi}$ est régulière), on a $\pi_j \vDash \left(\bigwedge_{\mathbf{v} \in V_\Delta} \left(\bigwedge_{i=1}^n \mathbf{v^i}\right) \vee \left(\bigwedge_{i=1}^n \mathbf{\bar{v}^i}\right)\right) \wedge \mathbf{x^{n+1}}$, donc $\pi_j \vDash \mathbf{x^{n+1}}$, ce qui est impossible aussi, puisque $\overrightarrow{\pi}$ est régulière.
5. Soient $i = n+2$ et $j \in \{1, \ldots, n, n+3\}$. Si i envie j alors $\pi_j \vDash \mathbf{y}$, ce qui est impossible puisque $\overrightarrow{\pi}$ est régulière. ▲

Lemme 4 *Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation régulière satisfaisant $n+1$ et $n+2$ et laissant 1 et $n+3$ non satisfaits. Soit $M(\overrightarrow{\pi})$ l'interprétation sur V_Δ obtenue à partir de $\overrightarrow{\pi}$ par la transformation suivante : pour tout $\mathbf{v} \in V_\Delta$, $M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \mathbf{v}$ (c'est-à-dire $\mathbf{v} \in M(\overrightarrow{\pi})$) si $n+1$ reçoit $\mathbf{\bar{v}^1}, \ldots, \mathbf{\bar{v}^n}$, et $M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \neg\mathbf{v}$ sinon, c'est-à-dire si $n+1$ reçoit $\mathbf{v^1}, \ldots, \mathbf{v^n}$. Alors $\overrightarrow{\pi}$ est efficace et sans envie seulement si $M(\pi) \nvDash \alpha_1$.*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation régulière satisfaisant $n+1$ et $n+2$. Puisque $\overrightarrow{\pi}$ satisfait $n+2$, $\mathbf{y} \in \pi_{n+2}$. De plus, $\overrightarrow{\pi}$ satisfait $n+1$ sans lui attribuer $\mathbf{y}$, en conséquence, pour tout $\mathbf{v}$, $n+1$ reçoit soit tous les $\mathbf{v^i}$ soit tous les $\mathbf{\bar{v}^i}$. Cela prouve que notre définition de $M(\overrightarrow{\pi})$ est bien fondée.

Maintenant, supposons que $\overrightarrow{\pi}$ est efficace et sans envie, et supposons que $M(\pi) \vDash \alpha_1$. Il est possible de satisfaire l'un des deux agents 1 et $n+3$ sans qu'aucun agent $j \notin \{1, n+3\}$ ne soit lésé, et ce en lui donnant $\{\mathbf{x^1}\} \cup \bigcup(\mathbf{\bar{v}^i} \mid M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \neg\mathbf{v^i}) \cup \bigcup(\mathbf{v^i} \mid M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \mathbf{v^i})$. Alors, puisque $\overrightarrow{\pi}$ est efficace, cette allocation doit satisfaire au moins l'un des deux agents 1 et $n+3$. Elle ne peut pas les satisfaire tous deux simultanément (à cause de $\mathbf{x^1}$). Ainsi, seul l'un de ces deux agents est satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, provoquant donc l'envie de l'autre. Cela contredit l'hypothèse d'absence d'envie de $\overrightarrow{\pi}$, ce qui prouve au final que $M(\overrightarrow{\pi}) \nvDash \alpha_1$. ▲

Lemme 5 *Pour toute interprétation M sur V_Δ, définissons $\overrightarrow{\pi}^M \in \wp(\mathscr{O})^n$ par :*
- ▷ *pour tout $i \in 1, \dots, n$, $\pi_i^M = \{\mathbf{v^i} \mid M \vDash \mathbf{v}\} \cup \{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{i} \mid M \vDash \neg\mathbf{v}\} \cup \{\mathbf{x^i}\}$;*
- ▷ *$\pi_{n+1}^M = \{\mathbf{x^{n+1}}\} \cup \{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{i} \mid M \vDash \mathbf{v}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\mathbf{v^i} \mid M \vDash \neg\mathbf{v}, i = 1, \dots, n\}$;*
- ▷ *$\pi_{n+2}^M = \{\mathbf{y}\}$*
- ▷ *$\pi_{n+3}^M = \varnothing$.*

Alors :
1. *$\overrightarrow{\pi}^M$ est une allocation bien définie et régulière qui satisfait $n+1$ et $n+2$;*
2. *$M(\overrightarrow{\pi}^M) = M$ ($M(\overrightarrow{\pi}^M)$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{\pi}^M$ de la même manière que dans le lemme 4) ;*
3. *pour tout $i \in 1, \dots, n$, $\overrightarrow{\pi}^M$ satisfait i si et seulement si $M \vDash \alpha_i$;*
4. *$\overrightarrow{\pi}^M$ est efficace si et seulement si M satisfait un sous-ensemble maximal consistant de Δ.*

Démonstration 1. On peut aisément vérifier que $\overrightarrow{\pi}^M$ n'attribue pas le même objet à plus d'un seul individu, et que $\overrightarrow{\pi}^M$ peut seulement donner à chaque agent i un ensemble d'objets inclus dans $\sigma(i)$. Ainsi, c'est une allocation bien définie et régulière. Cette allocation satisfait de manière évidente $n+1$ et $n+2$.

2. Si $M \vDash \mathbf{v}$ alors π_{n+1}^M contient $\{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{i} \mid i = 1, \dots, n\}$ et donc $M(\overrightarrow{\pi}^M) \vDash \mathbf{v}$. Le cas $M \vDash \neg v$ est complètement similaire.
3. Soit $i \in 1, \dots, n$. Puisque $\overrightarrow{\pi}^M$ donne $\mathbf{x^i}$ à l'agent i, $\overrightarrow{\pi}^M$ satisfait i si et seulement si $F(\pi_i^M) \vDash \beta_i$, ce qui est équivalent à $M \vDash \alpha_i$.
4. On peut déduire du point 3 le fait que $\{i \mid \overrightarrow{\pi}^M \text{ satisfait } i\} = \{i \mid M \vDash \alpha_i\} \cup \{n+1, n+2\}$ (de manière évidente, $n+3$ n'est pas satisfaite). De plus, puisque les préférences sont dichotomiques, un partage $\overrightarrow{\pi}$ est efficace si et seulement si l'ensemble des individus qu'il satisfait est maximal pour l'inclusion. Ainsi, $\overrightarrow{\pi}^M$ est efficace si et seulement si M satisfait un sous-ensemble maximal consistant de Δ. ▲

Lemme 6 *Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation régulière et efficace qui satisfait $n+1$ et $n+2$. Alors $M(\overrightarrow{\pi})$ satisfait un sous-ensemble maximal consistant de Δ.*

Démonstration L'allocation $\overrightarrow{\pi}$ est régulière et satisfait $n+1$ et $n+2$, donc de manière évidente $\pi_{n+2} = \{y\}$ et d'après le lemme 4 $M(\overrightarrow{\pi})$ est bien définie. Nous allons maintenant considérer l'allocation $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$, définie à partir de $\overrightarrow{\pi}$ de la même manière que dans les lemmes précédents. Nous avons $\pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})} = \{\mathbf{x^{n+1}}\} \cup \{\mathbf{v^i} \mid M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \neg\mathbf{v}\} \cup \{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{i} \mid M(\overrightarrow{\pi}) \vDash \mathbf{v}\} = \{\mathbf{x^{n+1}}\} \cup \{\mathbf{v^i} \mid \{\mathbf{v^1}, \dots, \mathbf{v^n}\} \subset \pi_{n+1}\} \cup \{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{i} \mid \{\bar{\mathbf{v}}^\mathbf{1}, \dots, \bar{\mathbf{v}}^\mathbf{n}\} \subset \pi_{n+1}\}$. Puisque $n+1$ est satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, π_{n+1} doit contenir $\{\mathbf{x^{n+1}}\}$, d'où nous pouvons affirmer que $\pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})} \subseteq \pi_{n+1}$.

Soit $i \in \{2, \dots, n\}$. Puisque l'allocation $\overrightarrow{\pi}$ est régulière, nous avons $\pi_i \subset \sigma(i)$. Puisque $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ est une allocation complète par définition, et régulière d'après le lemme 5, $\sigma(i) \subset \pi_i^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})}$. Puisque $\pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})} \subseteq \pi_{n+1}$ nous avons $\sigma(i) \subset \pi_i^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+1}$, et donc $\pi_i \subset \pi_i^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+1}$. $\overrightarrow{\pi}$ étant une allocation, nous avons bien entendu $\pi_i \cap \pi_{n+1} = \varnothing$, d'où $\pi_i \subseteq \pi_i^{M(\overrightarrow{\pi})}$.

$\overrightarrow{\pi}$ étant régulière, nous avons $\pi_1 \cup \pi_{n+3} \subseteq \sigma(1) \cup \sigma(n+3)$. Puisque $\sigma(1) = \sigma(n+3)$, cette dernière inclusion se ramène à $\pi_1 \cup \pi_{n+3} \subseteq \sigma(1)$. De plus, nous avons $\sigma(1) \subset \pi_1^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+3}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ pour des raisons similaires à celles que nous avons évoquées pour $i \in \{2, \dots, n\}$, ce qui se ramène, grâce à $\pi_{n+1}^{M(\overrightarrow{\pi})} \subseteq \pi_{n+1}$ et $\pi_{n+3}^{M(\overrightarrow{\pi})} = \varnothing$, à $\sigma(1) \subset \pi_1^{M(\overrightarrow{\pi})} \cup \pi_{n+1}$, et, à l'aide de $\pi_1 \cap \pi_{n+1} = \varnothing$, nous déduisons l'inclusion $\pi_1 \cup \pi_{n+3} \subseteq \pi_1^{M(\overrightarrow{\pi})}$.

Nous pouvons désormais prouver que $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ est efficace. Puisque les préférences sont monotones, tous les individus sauf $n+3$ satisfaits par $\overrightarrow{\pi}$ sont satisfaits aussi par $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ (puisque $\forall i \neq n+3$, $\pi_i \subseteq \pi_i^{M(\overrightarrow{\pi})}$).

- ▷ Si $n+3$ n'était pas satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, alors nous pouvons immédiatement déduire que $\pi_{M(\overrightarrow{\pi})}$ est efficace.
- ▷ Si $n+3$ était satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, supposons que $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ n'est pas efficace. Dans ce cas, il existe une allocation $\overrightarrow{\pi}'$ telle que $\forall i$, $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ satisfait i implique que $\overrightarrow{\pi}'$ satisfait i et il existe un j particulier ($j \neq 1$) tel que $\overrightarrow{\pi}'$ satisfait j et $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$ ne satisfait pas j. Clairement, $\overrightarrow{\pi}'$ satisfait 1 (puisque c'est le cas pour $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$), donc $j \neq n+3$ (car satisfaire simultanément 1 et $n+3$ est impossible). Considérons l'allocation $\overrightarrow{\pi}''$ déduite de $\overrightarrow{\pi}'$ par simple échange des parts de 1 et $n+3$. Nous avons, pour tout $i \in \{2,\ldots,n+2\}$, $\overrightarrow{\pi}$ satisfait i implique $\pi^{M(\overrightarrow{\pi})}$ satisfait i implique à son tour $\overrightarrow{\pi}'$ satisfait i implique enfin $\overrightarrow{\pi}''$ satisfait i. Nous avons aussi $\overrightarrow{\pi}$ satisfait $n+3$ et ne satisfait pas 1, ce qui est la même chose pour $\overrightarrow{\pi}''$. Ainsi $\overrightarrow{\pi}$ satisfait i implique $\overrightarrow{\pi}''$ satisfait i pour tout i. De plus, $\overrightarrow{\pi}''$ satisfait $j \in \{2,\ldots,n+2\}$ (le même j que ci-avant) alors que ce n'est pas le cas pour $\overrightarrow{\pi}^{M(\overrightarrow{\pi})}$, et donc ce n'est pas le cas non plus pour $\overrightarrow{\pi}$. Cela prouve que $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-dominé, ce qui est contradictoire avec les hypothèses.

En conséquence, $\pi^{M(\overrightarrow{\pi})}$ est efficace, d'où nous pouvons conclure avec le lemme 5 (point 4), que $M(\overrightarrow{\pi})$ satisfait un sous-ensemble maximal consistant de Δ. ▲

Lemme 7 *Toute allocation efficace et sans envie pour $\mathcal{P}(\Delta)$ satisfait $n+1$ et $n+2$, et laisse 1 et $n+3$ insatisfaits.*

Démonstration Supposons que $\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas $n+1$; alors $\mathbf{y} \notin \pi_{n+1}$. Maintenant, si $\mathbf{y} \in \pi_{n+2}$ alors $n+1$ envie $n+2$. Si $\mathbf{y} \notin \pi_{n+2}$ alors $\overrightarrow{\pi}$ n'est pas efficace, car si l'on donnait $\mathbf{y}$ à $n+2$ on le satisferait et cela conduirait à une meilleure allocation que $\overrightarrow{\pi}$.

Maintenant, supposons que $\overrightarrow{\pi}$ ne satisfait pas $n+2$, c'est-à-dire que $\mathbf{y} \notin \pi_{n+2}$. Si $\mathbf{y} \in \pi_{n+1}$ alors $n+2$ envie $n+1$. Si $\mathbf{y} \notin \pi_{n+1}$ alors encore une fois $\overrightarrow{\pi}$ n'est pas efficace, car si l'on donnait $\mathbf{y}$ à $n+1$ on le satisferait et cela conduirait à une meilleure allocation que $\overrightarrow{\pi}$.

En ce qui concerne les agents 1 et $n+3$, on peut remarquer que puisqu'ils ont des préférences identiques, toute allocation sans envie doit soit les satisfaire tous les deux, soit les laisser tous deux insatisfaits. Puisqu'ils ne peuvent être simultanément satisfaits (à cause de $\mathbf{x^1}$), tout partage sans envie doit les laisser tous deux insatisfaits. ▲

Lemme 8 *S'il existe une allocation EEF, alors il existe un sous-ensemble maximal consistant de Δ qui ne contient pas α_1.*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation efficace et sans envie. D'après le lemme 2, $\overrightarrow{\pi}^R$ est régulière, efficace et sans envie. D'après le lemme 7, $\overrightarrow{\pi}^R$ satisfait $n+1$ et $n+2$ et laisse 1 et $n+3$ insatisfaits. Alors d'après le lemme 6, $M(\overrightarrow{\pi}^R)$ satisfait un sous-ensemble maximal consistent de Δ, et d'après le lemme 4, $M(\overrightarrow{\pi}^R) \not\models \alpha_1$. Ainsi $\{\alpha_i \in \Delta \mid M(\overrightarrow{\pi}^R) \models \alpha_i\}$ est un sous-ensemble maximal consistant de Δ et ne contient pas α_1. ▲

Lemme 9 *S'il existe un sous-ensemble maximal consistant de Δ qui ne contient pas α_1 alors il existe une allocation EEF.*

Démonstration Supposons qu'il existe un sous-ensemble $\mathscr{S}$ maximal consistant de Δ qui ne contient pas α_1, et soit M un modèle de $\bigwedge_{\varphi \in \mathscr{S}} \varphi$. D'après le point 4 du lemme 5, $\overrightarrow{\pi}^M$ est efficace.

D'après le point 1 du lemme 5, l'allocation $\overrightarrow{\pi}^M$ est régulière ; donc d'après le lemme 3, $\overrightarrow{\pi}^M$ est sans envie si et seulement si (i) 1 n'envie pas $n+3$, (ii) $n+3$ n'envie pas 1 (iii) $n+1$ n'envie pas $n+2$ et (iv) $n+2$ n'envie pas $n+1$. Par définition de $\overrightarrow{\pi}^M$, $\overrightarrow{\pi}^M$ ne satisfait pas $n+3$, donc (i) est vérifié. D'après le point 3 du lemme 5, $M \not\models \alpha_1$ implique que $\overrightarrow{\pi}^M$ ne satisfait pas 1, en conséquence (ii) est aussi vérifié. Finalement, d'après le point 1 du lemme 4, $n+1$ et $n+2$ sont satisfaits par $\overrightarrow{\pi}^M$, et donc (iii) et (iv) sont vérifiés. Ainsi, $\overrightarrow{\pi}^M$ est sans envie. ▲

Nous avons désormais réuni tout le matériel nécessaire pour prouver la proposition 4.2 :

Démonstration (Proposition 4.2) D'après les lemmes 8 et 9, l'existence d'un sous-ensemble maximal consistant de Δ qui ne contient pas α_1 et l'existence d'un partage efficace et sans envie pour $\mathcal{P}(\Delta)$ sont équivalents. Clairement, $\mathcal{P}(\Delta)$ est calculée en temps polynomial. Ainsi, $\mathcal{P}$ est une réduction polynomiale de [$\overline{\text{RSI}}$] vers [EEF EXISTENCE], ce qui montre la Σ_2^{p}-difficulté de ce dernier problème, et finalement sa Σ_2^{p}-complétude. ▲

Un corollaire évident à cette proposition est que le résultat de Σ_2^{p}-complétude est valable pour des préférences dichotomiques générales (non nécessairement monotones) :

Corollaire 1 *Le problème [EEF EXISTENCE] pour des préférences dichotomiques générales sous forme logique est Σ_2^{p}-complet.*

4.1.1.2 Restrictions sur le langage

La complexité élevée du problème général a pour conséquence qu'il peut être intéressant de s'intéresser aux restrictions et aux variantes de ce problème pour lesquelles cette complexité peut décroître. Nous allons analyser trois types de restrictions intuitives du problème [EEF EXISTENCE], définies respectivement :

- ▷ en fixant le nombre d'agents, et plus précisément en restreignant le problème au cas où il n'y a que deux agents ;
- ▷ en imposant des préférences identiques pour tous les agents ;
- ▷ en restreignant la syntaxe des buts des agents, en limitant leur expression à certaines sous-classes de formules propositionnelles (par exemple les clauses, les cubes, ...).

Contrairement au problème général [EEF EXISTENCE], la complexité de ces restrictions est potentiellement sensible au fait que les préférences soient monotones ou non.

Préférences identiques Considérons tout d'abord le cas pour lequel les agents ont des préférences dichotomiques identiques, c'est-à-dire que toutes les formules φ_i sont identiques.

Proposition 4.3 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec n préférences identiques monotones dichotomiques est* NP*-complet. Ce résultat reste valable pour un nombre fixé d'agents $n \geq 2$.*

Démonstration Si les préférences sont identiques, tout partage sans envie doit satisfaire soit tous les agents, soit aucun d'entre eux. Maintenant, si les préférences sont monotones, il est toujours possible de satisfaire au moins un agent (en lui donnant tous les objets). En conséquence, une allocation est EEF si et seulement si elle satisfait tous les agents. On peut clairement vérifier en temps polynomial qu'une allocation donnée satisfait tous les agents, d'où l'appartenance à NP.

La difficulté vient d'une simple réduction depuis le problème [SET SPLITTING] :

Problème 3: [SET SPLITTING]

INSTANCE :	Une collection $C = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n\}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini $\mathscr{S}$.
QUESTION :	Existe-t-il une partition $\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \rangle$ de $\mathscr{S}$ telle qu'aucun des sous-ensembles de C n'est entièrement contenu ni dans $\mathscr{S}_1$ ni dans $\mathscr{S}_2$?

Soit $(C, \mathscr{S})$ une instance de [SET SPLITTING], et soit $\mathcal{P}(C, \mathscr{S})$ l'instance suivante de [EEF EXISTENCE] :

Agents : 2 agents,

Objets : un objet $o(a)$ par élément $a \in \mathscr{S}$,

Préférences : $\varphi_1 = \varphi_2 = \bigwedge_{\mathscr{C}_i \in C} \bigvee_{a \in \mathscr{C}_i} \mathbf{o}(a)$ (et comme à l'accoutumée $\varphi_k^* = \bigwedge_{\mathscr{C}_i \in C} \bigvee_{a \in \mathscr{C}_i} \mathbf{alloc(o(a), k)}$) : chaque agent désire au moins un objet de chaque ensemble.

Il est facile de voir que s'il existe au moins une partition $\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \rangle$ de $(C, \mathscr{S})$ qui vérifie les conditions du problème [SET SPLITTING], il est possible de trouver une allocation qui satisfait les deux agents, en leur donnant respectivement $o(\mathscr{S}_1)$ et $o(\mathscr{S}_2)$. Réciproquement, supposons qu'il existe une allocation efficace et sans envie $\overrightarrow{\pi}$, alors cette allocation doit satisfaire les deux agents. Soit $\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \rangle = \langle o^{-1}(\pi_1), o^{-1}(\pi_2) \rangle$. Supposons qu'il existe un $\mathscr{C}_i \in C$ tel que $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{S}_1$ ou $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{S}_2$ (disons par exemple $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{S}_1$). Alors $\bigvee_{a \in \mathscr{C}_i} \mathbf{alloc(o(a), 2)}$ est faux, ce qui falsifie φ_2^*, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. En conséquence $\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \rangle$ est une partition de $(C, \mathscr{S})$ qui vérifie les conditions du problème [SET SPLITTING].

Cette réduction est clairement polynomiale, d'où la NP-difficulté du problème [EEF EXISTENCE] avec 2 agents ayant des préférences dichotomiques identiques et monotones. ▲

Contrairement à la proposition 4.2, la proposition 4.4 est sensible à la monotonie des préférences.

Proposition 4.4 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec n préférences identiques dichotomiques est co-BH_2-complet. Ce résultat reste valable pour un nombre fixé d'agents $n \geq 2$.*

Démonstration Si les préférences sont identiques, tout partage sans envie doit satisfaire soit tous les agents, soit aucun d'entre eux. Maintenant, soit φ la formule représentant les préférences d'un agent (bien entendu φ est identique pour tous les agents). Si φ est satisfiable alors il est possible de satisfaire au moins un agent. Dans ce cas, une allocation $\overrightarrow{\pi}$ est EEF si et seulement si $\overrightarrow{\pi}$ satisfait tous les agents. Si φ n'est pas satisfiable, alors toute allocation est EEF. En conséquence, il existe un partage EEF si et seulement si $\Gamma \wedge \varphi_1^* \ldots\ldots \varphi_n^*$ est satisfiable ou φ ne l'est pas. Cela prouve l'appartenance à co-BH_2.

La difficulté est montrée par une simple réduction depuis [SAT-OR-UNSAT]. Soit (φ, ψ) une paire de formules propositionnelles qui sont supposées (sans perte de généralité) n'avoir aucune variable en commun. Nous pouvons transformer cette paire de formules en l'instance du problème [EEF EXISTENCE] définie comme suit :

Agents : 2 agents ;

Objets : 2 objets o et o' par variable propositionelle $\mathbf{o}$ apparaissant dans φ, un objet p par variable propositionnelle $\mathbf{p}$ apparaissant dans ψ, et un objet y ;

Préférences : $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \vee \varphi' \vee (y \wedge \psi)$, où φ' désigne la formule φ dans laquelle chaque variable $\mathbf{o}$ a été remplacée par $\mathbf{o}'$.

1. Supposons que φ n'est pas satisfiable, mais que ψ l'est (ce qui correspond à une instance négative de [SAT-OR-UNSAT]). Alors il est possible de satisfaire au moins un agent en lui donnant y et les objets o correspondant aux variables instanciées à vrai dans le modèle de ψ. Cependant, il n'est pas possible de satisfaire le deuxième agent simultanément, car φ n'est pas satisfiable (et en conséquence φ' ne l'est pas non plus), et le premier agent a déjà pris y. En conséquence, il n'y a pas de partage EEF dans ce cas.

2. Supposons maintenant que φ est satisfiable ou bien ψ ne l'est pas (ce qui correspond à une instance positive de [SAT-OR-UNSAT]). Il y a deux cas :
   - ▷ φ est satisfiable. Dans ce cas, peu importe que ψ soit satisfiable ou pas, il est possible de satisfaire les deux agents en satisfaisant simultanément φ pour le premier d'entre eux et φ' pour le second. En conséquence il y a une allocation EEF.
   - ▷ φ et ψ sont tous deux non satisfiables (rappelons que le cas φ insatisfiable et ψ satisfiable est déjà couvert par le point 1). Dans ce cas, il est clairement impossible de satisfaire un agent, et donc l'allocation vide est efficace et sans envie.

En conséquence, il existe une allocation EEF si et seulement si φ est satisfiable ou ψ ne l'est pas, ce qui prouve la proposition. ▲

Deux agents Nous pouvons constater que pour les deux résultats précédents, la difficulté du problème subsiste même si le nombre d'agents est *fixé* (supérieur à 2). Les choses sont différentes avec la proposition 4.2, pour laquelle la difficulté chute lorsque l'on fixe le nombre d'agents. Littéralement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.5 *Le problème [EEF EXISTENCE] pour deux agents avec des préférences monotones dichotomiques est* NP*-complet.*

Démonstration La NP-difficulté est un corollaire de la proposition 4.4. L'appartenance à NP est obtenue comme suit. Soit (φ_1, φ_2) la paire de formules représentant les préférences des agents, où φ_1, φ_2 sont toutes deux positives. Les formules Γ, Λ, ainsi que les formules φ_i^* sont définies comme précédemment (voir section 3.3.1), de même que $F(\overrightarrow{\pi})$ pour toute allocation $\overrightarrow{\pi}$. L'allocation $\overrightarrow{\pi}$ est efficace si et seulement si soit (a) elle satisfait les deux agents, soit (b) elle ne satisfait qu'un seul des deux agents, et $\Gamma \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$ est insatisfiable, soit (c) il est impossible de satisfaire même un seul agent, c'est-à-dire que φ_1 et φ_2 sont toutes deux insatisfiables. Le cas (c) est impossible car φ_1 et φ_2 sont positives. En outre, $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie si et seulement si $F(\overrightarrow{\pi}) \models \Lambda$. En conséquence, $\overrightarrow{\pi}$ est EEF si et seulement si soit (a) $F(\overrightarrow{\pi}) \models \Gamma \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$, soit (b) $F(\overrightarrow{\pi}) \models \Gamma \wedge (\varphi_1^* \vee \varphi_2^*) \wedge \Lambda$. En conséquence, il existe une allocation EEF si et seulement si $(\Gamma \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*) \vee (\Gamma \wedge (\varphi_1^* \vee \varphi_2^*) \wedge \Lambda)$ est satisfiable, d'où l'appartenance à NP. ▲

Proposition 4.6 *Le problème [EEF EXISTENCE] pour 2 agents avec des préférences dichotomiques est* co-BH_2*-complet.*

Démonstration La preuve d'appartenance est fondée sur la réduction suivante vers [SAT-OR-UNSAT]. Soit $\mathcal{P}$ une instance du problème EEF avec 2 agents ayant respectivement les préférences φ_1 et φ_2. Nous transformons cette instance en une instance (ψ, ψ') de [SAT-OR-UNSAT], définie comme suit (la formule Γ est définie comme à l'accoutumée) : $\psi = (\Gamma \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ et $\psi' = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Nous allons montrer que ψ est satisfiable ou ψ' est insatisfiable si et seulement s'il existe une allocation EEF pour $\mathcal{P}$.

1. Supposons que ψ est non satisfiable, mais que ψ' l'est. Puisque ψ est non satisfiable, aucun partage valide ne peut satisfaire les deux agents (car $\Gamma \wedge \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$ est non satisfiable). Nous pouvons donc déduire que toute allocation efficace satisfait exactement un agent. Puisque $(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ n'est pas satisfiable, $Mod(\varphi_1) = Mod(\varphi_2)$ (en d'autres termes φ_1 et φ_2 sont logiquement équivalents). Soit $\overrightarrow{\pi}$ l'allocation qui satisfait l'agent 1 (le cas est similaire avec l'agent 2), $F(\overrightarrow{\pi}) \models \varphi_1^*$, et donc $F(\overrightarrow{\pi}) \models \varphi_{2|1}^*$. Puisque $F(\overrightarrow{\pi}) \not\models \varphi_2^*$ (car il est impossible de satisfaire les deux agents), $F(\overrightarrow{\pi}) \not\models \Lambda$ et donc $\overrightarrow{\pi}$ n'est pas sans envie. D'où le fait qu'aucune allocation efficace n'est sans envie : en d'autres termes, il n'existe aucune allocation EEF.

2. Supposons maintenant que ψ est satisfiable ou ψ' ne l'est pas.
   - ▷ ψ' n'est pas satisfiable. Ce cas peut être élucidé facilement, car aucun des deux agents n'est satisfiable. Dans ce cas, toute allocation est efficace et sans envie.
   - ▷ φ et ψ sont toutes deux satisfiables. On peut distinguer deux cas :
     - $\Gamma \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ est satisfiable. Dans ce cas, il y a une allocation, correspondant au modèle de $\Gamma \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$, qui satisfait les deux agents. Cette allocation est clairement EEF.
     - $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ est satisfiable, mais $\Gamma \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ne l'est pas (le cas avec $\varphi_2 \wedge \neg\varphi_1$ est similaire). Dans ce cas, il n'est pas possible de satisfaire les deux agents simultanément. Cependant, puisque ψ est satisfiable, il est possible d'en satisfaire au moins un, et, comme dans le point 1, toute allocation efficace satisfait exactement un agent. Puisque $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ est satisfiable, il existe un modèle de φ_1 qui n'est pas un modèle de φ_2. L'allocation correspondant à ce modèle est telle que l'agent 1 est satisfait et l'agent 2 ne l'est pas, mais l'agent 2 ne peut pas envier l'agent 1.

Cela montre finalement la correction de la réduction, qui est clairement polynomiale.
La difficulté vient directement de la proposition 4.4. ▲

Restrictions sur le langage propositionnel Dans les résultats précédents, nous n'avons fait aucune hypothèse spécifique sur les formules exprimant les préférences des agents, excepté (parfois) leur positivité, correspondant à la propriété de monotonie. Cependant, si nous restreignons l'ensemble des formules propositionnelles possibles, cela peut éventuellement faire décroître la complexité du problème [EEF EXISTENCE]. Nous allons nous pencher sur deux restrictions naturelles du langage propositionnel : dans le premier cas, nous restreignons l'ensemble des formules à l'ensemble des clauses, et dans le second cas nous limitons les formules propositionnelles à l'ensemble des cubes. Ces restrictions correspondent intuitivement à deux types de problèmes réels.

- ▷ Le cas où les préférences des agents sont représentées par des clauses correspond à un type de problèmes pour lesquels les objets sont regroupés en classes, et chaque agent ne désire qu'un seul objet par classe. On peut prendre l'exemple d'ensemble de patients en attente d'une greffe de rein. Chaque patient ne désire qu'un seul rein, mais parmi les reins disponibles il se peut qu'il y en ait plusieurs qui soient compatibles avec un même agent.
- ▷ Le cas où les préférences des agents sont représentées par des cubes correspond au type de problèmes pour lesquels chaque agent a besoin d'un unique ensemble d'objets. On peut citer par exemple le cas de problèmes pour lesquels les agents construisent l'objet qu'ils désirent à partir d'un ensemble de composants matériels (ou virtuels) basiques : l'ensemble des objets correspond aux composants basique ; et le cube représentant la préférence d'un agent correspond à l'objet construit qu'il désire.

Ces restrictions sur les formules propositionnelles font effectivement chuter la complexité du problème [EEF EXISTENCE]. Dans le cas de la restriction aux clauses d'objets, cela a même pour effet de rendre le problème polynomial.

Proposition 4.7 *Le problème [EEF EXISTENCE] pour des agents ayant des préférences dichotomiques restreintes aux clauses d'objets peut être résolu en temps polynomial.*

Démonstration Nous allons tout d'abord introduire deux hypothèses supplémentaires, et montrer que la complexité du problème ne décroît pas sous ces deux hypothèses. (1) Nous supposons tout d'abord que les préférences des agents sont monotones. Si l'un des agents a des préférences non monotones, cela signifie qu'il y a un littéral négatif dans sa clause. En conséquence, si on lui donne une part vide, on le satisfait sans léser un autre agent. Un tel agent peut donc être retiré du problème sans modifier la complexité. (2) Nous supposons de même que chaque agent désire au moins un objet. Si l'un des agents a une clause vide en tant que but, cela signifie qu'il ne peut être satisfait, quelle que soit la part qu'il reçoit. En conséquence, on peut le retirer du problème sans que cela ne change quoi que ce soit. Dans la suite de la preuve, nous nous limiterons donc aux problèmes qui vérifient les conditions (1) et (2).

La preuve est fondée sur le résultat suivant, que nous allons commencer par démontrer : lorsque les préférences des agents sont des disjonctions d'objets vérifiant les hypothèses (1) et (2), une allocation est Pareto-efficace et sans envie si et seulement si elle satisfait tous les agents. L'implication $\Leftarrow$ est immédiate. Afin de prouver l'implication $\Rightarrow$, il nous faut remarquer qu'un agent est satisfait si et seulement si il reçoit au moins un objet de sa clause. Maintenant, considérons une allocation $\overrightarrow{\pi}$ telle qu'il existe un agent i qui n'est pas satisfait par $\overrightarrow{\pi}$. Alors soit il est possible de le satisfaire sans léser un autre agent, et dans ce cas, $\overrightarrow{\pi}$ n'est pas Pareto-efficace, soit ce n'est pas possible parce que chaque objet de la disjonction de i a été donné à un autre agent qui le désire vraiment. Dans ce dernier cas, l'agent i envie ces autres agents, et $\overrightarrow{\pi}$ n'est donc pas sans envie.

En conséquence, la recherche d'une allocation Pareto-efficace et sans envie se ramène à la recherche d'une allocation qui donne à chaque agent un objet qu'il désire. Ainsi, toute instance $\mathcal{P}$ du problème [EEF EXISTENCE] peut être réduite en une instance du problème de couplage maximal ([MAXIMAL MATCHING], voir problème 11 page 163) dans un graphe bipartite $G_{\mathcal{P}}$ défini comme suit : un nœud par agent d'un côté, un nœud par objet de l'autre, et un arc entre un nœud-agent i et un nœud-objet o si et seulement si **o** apparaît dans la clause de l'agent i. On peut vérifier facilement qu'il existe une allocation Pareto-efficace et sans envie si et seulement s'il existe un couplage de taille n dans $G_{\mathcal{P}}$. Le problème de couplage peut être résolu en temps $O(nm)$ [Ford et Fulkerson, 1962], où m est la taille de la plus grande disjonction, ce qui prouve la proposition. ▲

Maintenant, nous allons nous intéresser au cas où les préférences des agents sont des cubes d'objets. De manière peu surprenante, ce cas est plus difficile que le précédent, sans toutefois dépasser les limites de NP.

Proposition 4.8 *Le problème [EEF EXISTENCE] pour des agents ayant des préférences dichotomiques restreintes aux cubes d'objets est* NP*-complet. Ce résultat reste valable si nous nous restreignons en plus aux préférences monotones.*

Démonstration La preuve est organisée comme suit. Tout d'abord, nous allons prouver l'appartenance à NP sans aucune hypothèse sur la monotonie des préférences. Dans un deuxième temps, nous montrerons la NP-difficulté dans le cas monotone.

Introduisons tout d'abord deux notations supplémentaires. Nous noterons $Obj^+(i)$ (resp. $Obj^-(i)$) l'ensemble des objets apparaissant comme littéraux positifs (resp. négatifs) dans le cube de l'agent i. Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation. $\overrightarrow{\pi}$ sera dite *minimalement régulière* si pour tout i, soit $\pi_i = Obj^+(i)$, soit $\pi_i = \varnothing$. Pour une allocation donnée $\overrightarrow{\pi}$, nous noterons $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ l'allocation minimalement régulière qui lui correspond, c'est-à-dire l'allocation telle que pour tout i, $\pi_i^{MR} = \varnothing$ si $Obj^+(i) \not\subseteq \pi_i$, et $\pi_i^{MR} = Obj^+(i)$ si $Obj^+(i) \subseteq \pi_i$. Nous noterons aussi $Sat(\pi)$ l'ensemble des agents satisfaits par $\overrightarrow{\pi}$: $Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR}) = \{i \mid \pi_i^{MR} = Obj^+(i)\}$), et $All(\overrightarrow{\pi}) = \bigcup_{i \in I} \pi_i$ (l'ensemble des objets alloués).

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 10 *Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation. Nous avons :*

▷ $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ *est minimalement régulière ;*

▷ *$Sat(\overrightarrow{\pi}) \subseteq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$;*
▷ *Si $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace, alors $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est aussi Pareto-efficace.*

Démonstration ▷ Pour tout agent i, $\pi_i^{MR} = \varnothing$ ou $\pi_i^{MR} = Obj^+(i)$ par définition de $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Donc $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est minimalement régulière.

▷ Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation, et soit i un agent. Si i est satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, alors $Obj^+(i) \subseteq \pi_i$ et $Obj^-(i) \cap \pi_i = \varnothing$. Par définition de $\overrightarrow{\pi}^{MR}$, nous avons $\pi_i^{MR} = Obj^+(i)$, et donc nous avons encore $Obj^+(i) \subseteq \pi_i$ et $Obj^-(i) \cap \pi_i = \varnothing$, donc l'agent i reste satisfait par $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Cela prouve que $Sat(\overrightarrow{\pi}) \subseteq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$.

▷ Supposons que $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace, et supposons qu'il existe un partage $\overrightarrow{\pi}'$ qui Pareto-domine $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Alors nous avons $Sat(\overrightarrow{\pi}) \subseteq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR}) \subsetneq Sat(\overrightarrow{\pi}')$, ce qui contredit le fait que $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace. Cela prouve le troisième point. ▲

Lemme 11 *Une allocation minimalement régulière $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est Pareto-efficace si et seulement s'il n'existe aucun agent i tel que (a) $i \notin Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ et (b) $Obj^+(i) \cap All(\overrightarrow{\pi}^{MR}) = \varnothing$.*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ une allocation minimalement régulière. Supposons qu'il existe un i tel que $i \notin Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ et $Obj^+(i) \subseteq \mathscr{O} \setminus All(\overrightarrow{\pi}^{MR})$. Alors l'allocation $\overrightarrow{\pi}'$ telle que $\forall j \neq i$ $\overrightarrow{\pi}'(j) = \overrightarrow{\pi}^{MR}(j)$ et $\overrightarrow{\pi}'(i) = Obj^+(i)$ est bien définie (puisque $Obj^+(i)$ est contenu dans l'ensemble des objets non alloués pour $\overrightarrow{\pi}^{MR}$), et Pareto-domine $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ (puisque tous les agents satisfaits par $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ sont aussi satisfaits par $\overrightarrow{\pi}'$, et l'agent i est maintenant satisfait par $\overrightarrow{\pi}'$ alors qu'il ne l'était pas par $\overrightarrow{\pi}^{MR}$).

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ n'est pas Pareto-efficace, et soit $\overrightarrow{\pi}'$ une allocation Pareto-efficace qui Pareto-domine $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Alors d'après le lemme 10, $\overrightarrow{\pi}'^{MR}$ est Pareto-efficace et Pareto-domine également $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Pour tout $i \in Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$, $\pi_i^{MR} = \pi_i'^{MR} = Obj^+(i)$ puisque ces allocations sont toutes deux minimalement régulières, et chaque agent satisfait par $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est aussi satisfait par $\overrightarrow{\pi}'^{MR}$. De plus, il existe un $j \notin Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ tel que $\pi_j'^{MR} = Obj^+(j)$. Puisque $All(\overrightarrow{\pi}^{MR}) = \bigcup_{i \in Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})} Obj^+(i)$ et puisque $\pi_j'^{MR} \in \mathscr{O} \setminus \bigcup_{i \in Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})} Obj^+(i)$, nous avons $Obj^+(j) \in \mathscr{O} \setminus All(\overrightarrow{\pi}^{MR})$, ce qui prouve au final le lemme. ▲

Les deux lemmes fournissent une procédure pour vérifier si une allocation $\overrightarrow{\pi}$ donnée est Pareto-efficace. Tout d'abord, on calcule $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ (ce qui peut être fait en temps polynomial). D'après le lemme 10, $Sat(\overrightarrow{\pi}) \subseteq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$. Si l'inclusion est stricte (c'est-à-dire si $Sat(\overrightarrow{\pi}) \subsetneq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$), alors $\overrightarrow{\pi}$ n'est de toute évidence pas Pareto-efficace, puisque $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ Pareto-domine cette allocation. Sinon, vérifier si $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace revient à vérifier si $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est Pareto-efficace, ce qui revient, selon le lemme 11, à n tests d'inclusion d'ensembles. En outre, vérifier que $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie est toujours polynomial. D'où l'on peut déduire que le problème est dans NP.

Nous allons maintenant montrer la difficulté du problème en se concentrant sur les préférences monotones (c'est-à-dire telles que $Obj^-(i) = \varnothing$ pour tout i). La preuve de complétude va nécessiter deux lemmes supplémentaires.

Lemme 12 *Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation. Supposons que les agents ont des préférences monotones. Si $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie, alors $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est sans envie.*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation. D'après le lemme 10, $Sat(\overrightarrow{\pi}) \subseteq Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$. Soit $i \in Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$. On a $\pi_i^{MR} \subseteq \pi_i$, ce qui montre que $i \in Sat(\pi)$, parce que nous traitons de préférences monotones. Maintenant supposons que l'agent i envie l'agent j dans $\overrightarrow{\pi}^{MR}$. Alors i n'est pas satisfait par $\overrightarrow{\pi}^{MR}$, et donc n'est pas satisfait non plus par $\overrightarrow{\pi}$. Puisque $\pi_j^{MR} \subseteq \pi_j$ et puisque les préférences de l'agent i sont monotones, l'agent i va continuer d'envier j dans $\overrightarrow{\pi}$. En conséquence, si $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie, alors $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ l'est aussi. ▲

Un corollaire important de ce lemme est que lorsque nous nous restreignons aux cubes monotones, l'existence d'une allocation Pareto-efficace et sans envie est équivalente à l'existence d'une allocation minimalement régulière Pareto-efficace et sans envie. En conséquence, nous pouvons restreindre notre problème d'existence aux allocations minimalement régulières.

Lemme 13 *Soient i et j deux agents différents (nous supposons toujours que les agents ont des préférences monotones). Alors : (il existe une allocation minimalement régulière $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ telle que l'agent i envie l'agent j) si et seulement si ($Obj^+(i) \subseteq Obj^+(j)$).*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ une allocation minimalement régulière. Supposons que i envie j. Alors clairement i n'est pas satisfait mais j l'est ; d'où $\overrightarrow{\pi}^{MR}(j) = Obj^+(j)$. Puisque i envie j, nous avons donc directement $Obj^+(i) \subseteq Obj^+(j)$.

Réciproquement, supposons que $Obj^+(i) \subseteq Obj^+(j)$. Alors l'allocation $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ qui attribue $Obj^+(j)$ à l'agent j et rien aux autres agents est très clairement minimalement régulière, et elle est aussi clairement telle que i envie j. ▲

Introduisons maintenant le problème NP-complet qui va nous servir de base pour prouver la NP-difficulté (toujours dans le cas monotone) :

Problème 4: [EXACT COVER BY 3-SETS] [Karp, 1972]

INSTANCE :	Un ensemble $\mathscr{S}$ de taille $3q$, et une collection $C = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{\|C\|}\}$ de sous-ensembles à 3 éléments de $\mathscr{S}$
QUESTION :	C contient-il une couverture exacte pour $\mathscr{S}$, c'est-à-dire une sous-collection $C' \subseteq C$ telle que chaque élément de $\mathscr{S}$ apparaît dans exactement un membre de C' ?

Soit $(\mathscr{S}, C = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{|C|}\})$ une instance de [EXACT COVER BY 3-SETS] (nous supposons sans perte de généralité que les $\mathscr{C}_i$ sont tous différents), et soit $\mathcal{P}(\mathscr{S}, C)$ l'instance suivante du problème [EEF EXISTENCE] :

Agents : un ensemble de $|C| + 2|\mathscr{S}|$ agents $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 \cup \mathscr{N}_2$, avec $\mathscr{N}_1 = \{1, \ldots, |C|\}$ et $\mathscr{N}_2 = \{|C|+1, \ldots, |C|+2|\mathscr{S}|\}$;

Objets : un ensemble de $2|\mathscr{S}|$ objets $\mathscr{O} = \mathscr{O} \cup \mathscr{O}'$, avec $\mathscr{O} = \{o_1, \ldots, o_{|\mathscr{S}|}\}$ et $\mathscr{O}' = \{o'_1, \ldots, o'_{|\mathscr{S}|}\}$, chaque paire (o_i, o'_i) correspondant à un élément différent a_i de $\mathscr{S}$;

Préférences : pour tout agent $i \in \mathscr{N}_1$, $\varphi_i = \bigwedge_{a_j \in \mathscr{S}_i} \mathbf{o_j}$, et pour tout agent $k \in \{1, \ldots, |\mathscr{S}|\}$, $\varphi_{|C|+2k-1} = \varphi_{|C|+2k} = \mathbf{o_k} \wedge \mathbf{o'_k}$.

En d'autres termes, les préférences des $|C|$ premiers agents correspondent aux ensembles de la collection C, et les $2|\mathscr{S}|$ derniers agents sont regroupés par paire, chaque membre de la même paire ayant les mêmes préférences que l'autre membre.

Puisque tous les $\mathscr{S}_i$ sont différents et de taille 3, pour tout $i \neq j$, $\mathscr{S}_i \not\subseteq \mathscr{S}_j$, et donc $Obj^+(i) \not\subseteq Obj^+(j)$. Par définition des préférences, nous avons aussi $Obj^+(i) \not\subseteq Obj^+(j)$ pour tout $(i,j) \in \mathscr{N}_1 \times \mathscr{N}_2$ et de même pour tout $(i,j) \in \mathscr{N}_2 \times \mathscr{N}_1$. En conséquence, d'après le lemme 13, la seule source potentielle d'envie dans une telle instance ne peut venir que d'un agent de $\mathscr{N}_2$ qui envie son partenaire. Puisqu'il est impossible de satisfaire les deux agents de la même paire en même temps, un partage est sans envie si et seulement si il ne satisfait aucun agent de $\mathscr{N}_2$.

D'après le lemme 11, une allocation minimalement régulière $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est Pareto-efficace si et seulement s'il n'existe aucun i tel que $i \notin Sat(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ et $Obj^+(i) \subseteq \mathscr{O} \setminus All(\overrightarrow{\pi}^{MR})$. En conséquence, une allocation minimalement régulière $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est Pareto-efficace et sans envie si et seulement s'il n'existe aucun $k \in \{1, \ldots, |\mathscr{S}|\}$ tel que $\pi^{MR}_{|C|+2k-1} = \{o_k, o'_k\}$ ou $\pi^{MR}_{|C|+2k} = \{o_k, o'_k\}$, et il n'existe aucun $k' \in \{1, \ldots, |\mathscr{S}|\}$ tel que $\{o_{k'}, o'_{k'}\} \subset \mathscr{O} \setminus All(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ (cette dernière condition se ramène à $o_{k'} \notin All(\overrightarrow{\pi}^{MR})$, puisque $o_{k'}$ et $o'_{k'}$ doivent être alloués ensemble dans toute allocation minimalement régulière). Finalement, $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ est Pareto-efficace et sans envie si et seulement si $\forall k \in \{1, \ldots, |\mathscr{S}|\}$, il existe un agent $i \in \mathscr{N}_1$ tel que $o_k \in \pi^{MR}_i$, c'est-à-dire si et seulement si $\bigcup_{i \in \mathscr{N}_1} \pi^{MR}_i = \bigcup_{a_j \in \mathscr{S}} \{o_j\}$.

Soit $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ une allocation minimalement régulière. Nous pouvons alors définir la sous-collection $\zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ de la manière suivante : $\zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR}) = \{\mathscr{C}_i \in C \mid \pi^{MR}_i = Obj^+(i)\}$. L'application ζ définit clairement une bijection entre l'ensemble des allocations minimalement régulières et l'ensemble des sous-collections dont les éléments sont deux à deux disjoints, et on peut remarquer de plus que $\bigcup_{i \in \mathscr{N}_1} \pi^{MR}_i = \bigcup_{\mathscr{C}_j \in \zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR})} \bigcup_{a_k \in \mathscr{C}_j} \{o_k\})$.

Soit $C' \subseteq C$ une couverture exacte pour $\mathscr{S}$. Alors $\zeta^{-1}(C')$ existe et est une allocation minimalement régulière valide. Nous avons de plus $\bigcup_{i \in \mathscr{N}_1} \zeta^{-1}(C')(i) = \bigcup_{\mathscr{C}_j \in C} \bigcup_{a_k \in \mathscr{C}_j} \{o_k\} = \bigcup_{a_j \in \mathscr{S}} \{o_j\}$ car C' est une couverture. En conséquence, $\zeta^{-1}(C')$ est Pareto-efficace et sans envie d'après le résultat précédent.

Réciproquement, supposons qu'il existe une allocation $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ minimalement régulière, Pareto-efficace et sans envie. Alors $\zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ est une sous-collection de C dont les éléments sont deux à deux disjoints, et est tel que $\bigcup_{\mathscr{C}_i \in \zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR})} \bigcup_{a_j \in \mathscr{C}_i} \{a_j\} = \bigcup_{i \in \mathscr{N}_1} \bigcup_{o_j \in \pi^{MR}_i} \{a_j\} = \bigcup_{o_j \in \{\pi^{MR}_i \mid i \in \mathscr{N}_1\}} \{a_j\}$. $\overrightarrow{\pi}^{MR}$ étant Pareto-efficace et sans envie, nous avons $\bigcup_{i \in \mathscr{N}_1} \pi^{MR}_i = \bigcup_{a_j \in \mathscr{S}} \{o_j\}$, et donc $\bigcup_{o_j \in \{\pi^{MR}_i \mid i \in \mathscr{N}_1\}} \{a_j\} = \bigcup_{o_j \in \{o_j \mid a_j \in \mathscr{S}\}} \{a_j\} = \mathscr{S}$. Cela prouve que $\zeta(\overrightarrow{\pi}^{MR})$ est une couverture exacte pour $\mathscr{S}$.

Cette réduction est clairement polynomiale, d'où la NP-difficulté. ▲

La preuve précédente (et particulièrement le lemme 13) met en évidence le nœud du problème avec préférences conjonctives, c'est-à-dire le point qui concentre toute la difficulté de ce problème. Dans une instance de ce problème, la seule source d'envie potentielle vient de $Obj^+(i) \subseteq Obj^+(j)$ (si toutefois nous nous restreignons aux allocations minimalement régulières). Dans ce cas, nous ne pouvons pas satisfaire l'agent j sans créer de l'envie de la part de i pour cet agent. Maintenant, si $Obj^+(i) \subsetneq Obj^+(j)$, on peut enlever l'agent j de l'instance, car s'il est satisfait, alors forcément i va l'envier (remarquons toutefois que ce n'est vrai que pour des préférences monotones, car dans le cas contraire on peut donner à un agent un objet qui n'apparaît pas dans ses préférences, dans le seul but d'empêcher un autre agent de l'envier, et donc nous ne pouvons pas nous restreindre à des allocations minimalement régulières).

S'il n'y a aucune paire d'agents (i, j), $i \neq j$, telle que $Obj^+(i) = Obj^+(j)$, alors on peut enlever du problème tous les agents i tels qu'il existe un autre agent j tel que $Obj^+(j) \subsetneq Obj^+(i)$. Il est facile de voir qu'après cette opération, toute allocation minimalement régulière est sans envie. Puisqu'il y a au moins une allocation minimalement régulière Pareto-efficace, cela garantit l'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie dans ce cas.

Plus formellement, on a :

Proposition 4.9 *Il existe toujours un partage efficace et sans envie pour une instance du problème [EEF EXISTENCE] avec des agents ayant des préférences dichotomiques restreintes à des cubes d'objets lorsque la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall (i, j) \in \mathscr{N}^2,\ i \neq j,\ (\varphi_i = \varphi_j) \Rightarrow \left(\exists k \text{ tel que } k \neq i,\ k \neq j \text{ et } Obj^+(k) \subsetneq Obj^+(i)\right). \tag{4.1}$$

Bien entendu, il n'y a pas équivalence entre la condition 4.1 et l'existence d'un partage Pareto-efficace et sans envie (sinon la proposition 4.8 serait fausse[1]), car il peut arriver qu'étant donnés deux agents i et j ayant les mêmes préférences, la satisfaction de l'un de ces agents soit empêchée par un autre agent k tel que $Obj^+(i) \cap Obj^+(k) \neq \varnothing$ mais $Obj^+(k) \not\subset Obj^+(i)$. Voilà le cas difficile : lorsque deux agents i et j ont des préférences identiques, mais qu'aucun agent k n'a de préférences telles que $Obj^+(k) \subsetneq Obj^+(i)$, il peut cependant être possible d'empêcher i et j d'être satisfaits, à l'aide d'un autre agent, comme le montre l'exemple suivant : $\varphi_1 = \varphi_2 = \mathbf{o_1} \wedge \mathbf{o_2}$, et $\varphi_2 = \mathbf{o_2} \wedge \mathbf{o_3}$. Satisfaire l'agent 2 uniquement conduit à une allocation efficace et sans envie, alors que la condition 4.1 n'est pas vérifiée.

Démonstration (Proposition 4.9) Dans la preuve, nous noterons $\mathscr{N}_1$ l'ensemble des agents dont les préférences sont «minimales pour l'inclusion», c'est-à-dire que $\mathscr{N}_1 = \{i \mid \nexists j \text{ tel que } Obj^+(j) \subset Obj^+(i)\}$. Nous noterons $\mathscr{N}_2$ l'ensemble des autres agents : $\mathscr{N}_2 = \mathscr{N} \setminus \mathscr{N}_1$.

Voici une procédure simple pour trouver une allocation Pareto-efficace et sans envie : sélectionner de manière gloutonne un ensemble $\mathscr{S}$ maximal d'agents de $\mathscr{N}_1$, tel que chaque agent $i \in \mathscr{S}$ reçoit $Obj^+(i)$ (jusqu'à ce qu'il devienne impossible de sélectionner un nouvel agent dans $\mathscr{N}_1$).

L'allocation $\overrightarrow{\pi}$ qui résulte de cette procédure est minimalement régulière, et d'après le lemme 13 elle est clairement sans envie (par définition de $\mathscr{N}_1$). De plus, supposons qu'il existe un $i \notin Sat(\overrightarrow{\pi})$ tel que $Obj^+(i) \subseteq \mathscr{O} \setminus All(\pi)$. Alors $i \notin \mathscr{N}_1$, puisque si c'était le cas, la procédure aurait sélectionné cet agent, et donc il devrait être satisfait. Nous avons de plus $i \notin \mathscr{N}_2$, car si c'était le cas, alors il y aurait un $j \in \mathscr{N}_1$ tel que $Obj^+(j) \subset Obj^+(i)$, et donc $Obj^+(j) \subseteq \mathscr{O} \setminus All(\overrightarrow{\pi})$, ce qui est impossible pour les mêmes raisons que ci-dessus. En conséquence, $\overrightarrow{\pi}$ est aussi Pareto-efficace, d'après le lemme 11. ▲

Après s'être penchés sur les deux restrictions naturelles sur le langage propositionnel utilisé pour l'expression des préférences dichotomiques, nous introduisons un résultat plus général. Ce résultat s'appuie sur le fait que le résultat de difficulté de la proposition 4.2 est très clairement lié à la NP-complétude du problème [SAT]. Que se passe-t-il si l'on se restreint, pour l'expression des préférences, à une certaine classe $\mathcal{C}$ telle que [SAT]($\mathcal{C}$) soit polynomial ? Dans le cas général où l'on ne fait aucune autre hypothèse sur $\mathcal{C}$, on ne peut rien affirmer de plus sur la complexité du problème [EEF EXISTENCE] que pour le problème général. En revanche, si nous ajoutons en plus le fait que $\mathcal{C}$ est clos pour la conjonction, la complexité du problème tombe dans NP :

Proposition 4.10 *Soit $\mathcal{C}$ une classe de formules propositionnelles close pour la conjonction telle que [SAT]($\mathcal{C}$) est dans* P. *Alors le problème [EEF EXISTENCE] pour des agents ayant des préférences dichotomiques exprimées uniquement avec des formules de la classe $\mathcal{C}$ est dans* NP.

Démonstration L'appartenance à NP vient du fait qu'après avoir deviné une allocation $\overrightarrow{\pi}$ de manière non déterministe, vérifier qu'elle est Pareto-efficace et sans envie peut être fait en temps polynomial. En effet, étant donnée une allocation, on peut vérifier qu'elle est sans envie en temps $O(nm)$ (où m est la longueur de la formule la plus grande), juste en vérifiant, pour chaque agent non satisfait, s'il aurait été satisfait avec la part d'un autre agent. Étant donné l'ensemble $Sat(\overrightarrow{\pi})$ des agents satisfaits par $\overrightarrow{\pi}$, vérifier la Pareto-efficacité de $\overrightarrow{\pi}$ revient à vérifier pour tout $i \in \mathscr{N} \setminus Sat(\overrightarrow{\pi})$ si $\bigwedge_{j \in Sat \overrightarrow{\pi}} \varphi_j \wedge \varphi_i$ est insatisfiable. Cela peut être fait à l'aide d'un nombre linéaire d'appels à un oracle [SAT]($\mathcal{C}$), puisque toutes les préférences sont dans $\mathcal{C}$, et que cette classe est close pour la conjonction. Cela prouve que le problème [EEF EXISTENCE] avec les préférences des agents dans $\mathcal{C}$ est

[1]Ou bien on aurait prouvé que P = NP, ce qui est peu réaliste.

dans NP. ▲

Un corollaire de cette proposition est que pour toute classe $\mathcal{C}$ de formules propositionnelles close pour la conjonction telle que [SAT]($\mathcal{C}$) est polynomial et qui contient les cubes, le problème [EEF EXISTENCE] est NP-complet. Cela s'applique par exemple à la classe des formules en des formules 2-CNF ou à la classe des clauses de Horn.

4.1.1.3 Critères d'efficacité alternatifs

La raison principale à la complexité élevée du problème [EEF EXISTENCE] est qu'il est difficile de vérifier qu'une allocation est Pareto-efficace. En conséquence, la complexité de ce problème peut décroître si nous abandonnons la Pareto-efficacité et que nous choisissons un autre critère pour l'efficacité. Nous allons nous intéresser à deux critères alternatifs de l'efficacité : la complétude de l'allocation, et le nombre maximal d'agents satisfaits.

Tout d'abord, nous nous intéressons à la complétude comme critère alternatif de la Pareto-efficacité. En d'autres termes, on demande seulement aux allocations d'être *complètes*. Sans surprise, la complexité du problème tombe dans NP.

Proposition 4.11 *Le problème d'existence d'une allocation complète et sans-envie pour des agents avec des préférences dichotomiques est* NP*-complet. Il reste* NP*-complet même si l'on fixe le nombre d'agents à 2, et que ces agents ont des préférences identiques.*

> **Démonstration** Puisque l'on peut vérifier en temps polynomial qu'une allocation est complète, de même pour l'absence d'envie, l'appartenance à NP est directe.
>
> Nous allons montrer la NP-complétude pour un problème à deux agents ayant des préférences identiques, par réduction depuis le problème [SAT]. Soit φ une formule propositionnelle. Nous créons l'instance du problème de partage qui suit : les objets correspondent aux symboles propositionnels de φ, et nous ajoutons un objet supplémentaire y ; les deux agents ont les mêmes préférences, représentées par la formule $\varphi \vee \mathbf{y}$. Il est immédiat de constater que tout partage complet satisfait au moins l'un des agents (celui qui se voit attribuer y). Si φ est satisfiable, alors il est possible de satisfaire aussi l'autre agent avec une part qui correspond à un modèle de φ : donc il existe un partage complet et sans envie. Réciproquement, supposons qu'il existe un partage complet et sans envie. L'un des deux agents est forcément satisfait grâce à φ, ce qui prouve qu'il existe un modèle de cette formule.
>
> Nous avons donc prouvé la NP-complétude dans le cas de deux agents avec des préférences identiques. ▲

Nous pouvons remarquer que nous ne parlons pas dans la proposition du cas où les préférences sont monotones. Nous supposons que le problème d'existence d'un partage complet et sans envie pour deux agents ayant des préférences dichotomiques, identiques et monotones reste NP-complet (bien entendu il est dans NP), mais nous n'avons à ce jour pas la preuve de cette affirmation.

Le second critère alternatif d'efficacité auquel nous pouvons penser est le critère de maximalité pour la cardinalité (contrairement à la Pareto-efficacité qui est un critère de maximalité pour l'inclusion). Autrement dit, on recherche les allocations qui satisfont un nombre maximal d'agents.

Proposition 4.12 *Le problème d'existence d'une allocation sans envie parmi celles qui satisfont un* nombre maximal *d'agents avec des préférences dichotomiques et monotones est* Θ_2^{P}*-complet.*

Démonstration Le problème d'existence d'une allocation sans envie qui satisfait au moins k agents est dans NP. En conséquence, le nombre maximal d'agents pouvant être satisfaits simultanément peut être calculé par dichotomie en utilisant $\log n$ oracles NP. Il suffit ensuite, après avoir calculé ce nombre maximal d'agents, de deviner une allocation et de vérifier qu'elle est sans envie et satisfait le nombre d'agents calculé auparavant, ce qui ajoute un oracle NP supplémentaire. D'où l'appartenance à Θ_2^{p}.

La preuve de la Θ_2^{p}-complétude est obtenue par réduction depuis le problème suivant[2] :

Problème 5: [MAX-INDEX-SAT]$_{odd}$[Wagner, 1990]

INSTANCE :	Une suite de formules propositionnelles $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ telle que (χ_i est insatisfiable) $\Rightarrow$ (χ_{i+1} est insatisfiable.)
QUESTION :	L'index maximum i tel que χ_i est satisfiable est-il un nombre impair ?

Remarquons tout d'abord que la complexité de ce dernier problème reste la même sous les hypothèses suivantes :

- ▷ n est pair (s'il n'est pas pair, il suffit d'ajouter la formule $\bot$ à la fin de la liste) ;
- ▷ les ensembles de variables propositionnelles de la formule χ_i sont deux à deux disjointes (si deux formules χ_i et χ_{i+1} partagent des variables, il suffit de transformer chaque variable $\mathbf{x}$ de χ_i en une copie $\mathbf{x}'$ sans que cela ne change la satisfiabilité de χ_i, mais désormais les ensembles de variables propositionnelles de χ_i et χ_{i+1} sont disjoints).

Soit $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ une instance du problème [MAX-INDEX-SAT]$_{odd}$ avec les deux hypothèses additionnelles, et soit Var_i l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans χ_i. Nous transformons cette instance en l'instance $\mathcal{P}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ définie comme suit :

Agents : $2n$ agents : $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{1,2} \cup \mathscr{N}_{3,4} \cup \cdots \cup \mathscr{N}_{n-1,n}$, où le groupe $\mathscr{N}_{2i-1,2i}$ contient les quatre agents $\{4i-3, 4i-2, 4i-1, 4i\}$;

Objets : nous créons pour tout $\mathbf{x} \in Var_i$ (pour tout $i \in [\![1,n]\!]$) quatre objets o_v, $\overline{o_v}$, p_v, $\overline{p_v}$, et nous ajoutons n objets factices d_k ($k \in [\![1,2n]\!]$) ;

Préférences : pour chaque groupe $\mathscr{N}_{2i-1,2i}$ ($i \in [\![1,n/2]\!]$), les préférences des agents sont :

- ▷ $\varphi_{4i-3} = \varphi_{4i-2} = (\chi'_{2i-1} \wedge \mathbf{d_{2i-1}}) \vee (\chi'_{2i} \wedge \mathbf{d_{2i}})$,
- ▷ $\varphi_{4i-1} = \bigwedge_{\mathbf{x} \in V_{2i-1} \cup V_{2i}} \mathbf{o_x} \vee \overline{\mathbf{o_x}}$,
- ▷ $\varphi_{4i} = \bigwedge_{\mathbf{x} \in V_{2i-1} \cup V_{2i}} \mathbf{p_x} \vee \overline{\mathbf{p}}_\mathbf{x}$,

où χ'_k est la formule χ_k dans laquelle toute variable $\mathbf{x}$ a été remplacée par $\mathbf{o_x} \wedge \mathbf{p_x}$, et $\neg\mathbf{x}$ a été remplacée par $\overline{\mathbf{o}}_\mathbf{x} \wedge \overline{\mathbf{p}}_\mathbf{x}$.

La preuve de la proposition est fondée principalement sur le fait que le problème peut être découpé en $n/2$ sous-problèmes, chacun d'entre eux concernant les agents de $\mathscr{N}_{2i-1,2i}$:

Lemme 14 *Nous notons $\mathcal{P}^{|i}$ la restriction de $\mathcal{P}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ à l'ensemble des agents $\mathscr{N}_{2i-1,2i}$ et aux objets qu'ils désirent. Une allocation $\overrightarrow{\pi}$ sera dite* découpable *si $\forall i \neq j$, $\pi_{\mathscr{N}_{2i-1,2i}} \cap \pi_{\mathscr{N}_{2j-1,2j}} = \varnothing$. La restriction d'une allocation découpable $\overrightarrow{\pi}$ à $\pi_{\mathscr{N}_{2i-1,2i}}$ sera notée $\overrightarrow{\pi}^{|i}$.*

Il existe une allocation sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents de $\mathcal{P}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ si et seulement s'il existe une allocation découpable $\overrightarrow{\pi}$ telle que $\forall i \in [\![1,n/2]\!]$, $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ est sans envie et satisfait un nombre maximal d'agents pour $\mathcal{P}^{|i}$.

[2]Problème qui est cité plusieurs fois dans la littérature, mais qui ne semble pas avoir de nom. Celui que nous lui donnons a été inventé.

Démonstration Nous nous restreignons tout d'abord aux allocations *régulières*. Par «régulières», nous entendons, comme dans le lemme 2, l'ensemble des allocations qui ne donnent un objet à un agent que s'il le désire. On peut se restreindre à ces allocations sans changer le problème, pour les mêmes raisons que dans le lemme 2 : l'existence d'une allocation sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents est équivalente à l'existence d'une allocation *régulière* sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents. Puisque les ensembles Var_i sont disjoints deux à deux, deux problèmes différents $\mathcal{P}^{|i}$ and $\mathcal{P}^{|j}$ n'ont aucun objet en commun, et donc toute allocation régulière est aussi découpable.

Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation régulière. Supposons qu'il existe une allocation $\overrightarrow{\pi}'^{|i}$ pour le problème $\mathcal{P}^{|i}$, telle que $\overrightarrow{\pi}'^{|i}$ satisfait strictement plus d'agents que $\overrightarrow{\pi}^{|i}$. Alors l'allocation découpable construite à partir des sous-allocations $\overrightarrow{\pi}^{|j}$ pour $j \neq i$ et $\overrightarrow{\pi}'^{|i}$ est valide, régulière, et satisfait strictement plus d'agents que $\overrightarrow{\pi}$. Réciproquement, supposons qu'il existe une allocation régulière $\overrightarrow{\pi}'$ qui satisfait strictement plus d'agents que $\overrightarrow{\pi}$. Alors, il y a au moins un indice i tel que strictement plus d'agents de $\mathscr{N}_{2i-1,2i}$ sont satisfaits par $\overrightarrow{\pi}'^{|i}$ que par $\overrightarrow{\pi}^{|i}$. Cela prouve que toute allocation régulière $\overrightarrow{\pi}$ satisfait un nombre maximal d'agents si et seulement si pour tout i, $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ satisfait un nombre maximal d'agents.

Supposons maintenant que $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie. Alors de manière évidente tous les $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ le sont. Réciproquement, supposons que tous les $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ sont sans envie. Alors $\overrightarrow{\pi}$ est sans envie, car (1) aucun agent ne peut envier un autre agent du même groupe, car les $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ sont sans envie, et (2) aucun agent d'un groupe i ne peut envier un agent d'un autre groupe j, car $\bigcup_{k \in \mathscr{N}_{2i-1,2i}} \pi_k \cap \bigcup_{k \in \mathscr{N}_{2j-1,2j}} \pi_k = \varnothing$. ▲

Pour toute interprétation v_k de Var_k, nous définissons les ensembles d'objets suivants :
- ▷ $\omega(v_k) = \{o_x \mid v_k \models x\} \cup \{\overline{o_x} \mid v_k \not\models x\}$;
- ▷ $\rho(v_k) = \{p_x \mid v_k \models x\} \cup \{\overline{p_x} \mid v_k \not\models x\}$;
- ▷ $\overline{\omega}(v_k) = \{o_x \mid v_k \not\models x\} \cup \{\overline{o_x} \mid v_k \models x\}$;
- ▷ $\overline{\rho}(v_k) = \{p_x \mid v_k \not\models x\} \cup \{\overline{p_x} \mid v_k \models x\}$.

De plus, étant données deux interprétations v_{2i-1} et v_{2i} de Var_{2i-1} et Var_{2i} respectivement, nous noterons $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ l'allocation de $\mathcal{P}^{|i}$ définie comme suit :
- ▷ $\pi_{4i-3}^{v_{2i-1},v_{2i}} = \omega(v_{2i-1}) \cup \rho(v_{2i-1}) \cup \{d_{2i-1}\}$;
- ▷ $\pi_{4i-2}^{v_{2i-1},v_{2i}} = \omega(v_{2i}) \cup \rho(v_{2i}) \cup \{d_{2i}\}$;
- ▷ $\pi_{4i-1}^{v_{2i-1},v_{2i}} = \overline{\omega}(v_{2i-1}) \cup \overline{\omega}(v_{2i})$;
- ▷ $\pi_{4i}^{v_{2i-1},v_{2i}} = \overline{\rho}(v_{2i-1}) \cup \overline{\rho}(v_{2i})$.

Lemme 15 *Soient v_{2i-1} et v_{2i} deux interprétations respectives de Var_{2i-1} et Var_{2i}.*
- ▷ *$\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait les deux agents $4i-1$ et $4i$;*
- ▷ *$\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait $4i-3$ si et seulement si $v_{2i-1} \models \chi_{2i-1}$, et $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait $4i-2$ si et seulement si $v_{2i} \models \chi_{2i}$;*

Démonstration Soient v_{2i-1} et v_{2i} deux interprétations respectives de Var_{2i-1} et Var_{2i}.
- ▷ Par définition, $\overline{\omega}(v_k)$ contient o_x ou $\overline{o_x}$ pour toute variable $x \in Var_k$, donc $\pi_{4i-1}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ contient o_x ou $\overline{o_x}$ pour toute variable $v \in Var_{2i-1} \cup Var_{2i}$. En conséquence, l'agent $4i-1$ est satisfait par $\pi_{4i-1}^{v_{2i-1},v_{2i}}$. Le même raisonnement est valable pour l'agent $4i$.
- ▷ Par définition, χ_{2i-1} est satisfaite par v_{2i-1} si et seulement si χ'_{2i-1} est satisfaite par l'interprétation définie en instanciant à vrai tous les $\mathbf{o_x}$ et $\mathbf{p_x}$ (resp. tous les $\overline{\mathbf{o_x}}$ et $\overline{\mathbf{p_x}}$) tels que $v_{2i-1} \models \mathbf{x}$ (resp. $v_{2i-1} \not\models \mathbf{x}$). Donc si $v_{2i-1} \models \chi_{2i-1}$, $\pi_{4i-3}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait χ'_{2i-1}. Puisque cette part satisfait aussi

$\mathbf{d_{2i-1}}$, $4i-3$ est donc satisfait par $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$. Réciproquement, si $4i-3$ est satisfait par $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$, alors clairement χ'_{2i-1} doit être satisfaite par $\pi_{4i-3}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ (car $4i-3$ ne reçoit pas d_{2i}), ce qui prouve que χ_{2i-1} est satisfaite par v_{2i-1}. Le même raisonnement peut être appliqué pour χ_{2i} et l'agent $4i-2$. ▲

Lemme 16 *Considérons le problème restreint $\mathcal{P}^{|i}$.*

- ▷ *Si χ_{2i-1} et χ_{2i} sont toutes deux insatisfiables, alors pour toutes interprétations v_{2i-1} et v_{2i} de Var_{2i-1} et Var_{2i} respectivement, $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ est sans envie et satisfait un nombre maximal d'agents.*
- ▷ *Si seule χ_{2i-1} est satisfiable, alors si M_{2i-1} est un modèle de χ_{2i-1}, $\overrightarrow{\pi}^{M_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait un nombre maximal d'agents. De plus, il n'existe dans ce cas aucune allocation sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents.*
- ▷ *Si les deux formules χ_{2i-1} et χ_{2i} sont satisfiables, alors si M_{2i-1} et M_{2i} sont des modèles respectifs de χ_{2i-1} et χ_{2i}, $\overrightarrow{\pi}^{M_{2i-1},M_{2i}}$ satisfait un nombre maximal d'agents et est sans envie.*

Démonstration Supposons que ni χ_{2i-1} ni χ_{2i} ne sont satisfiables. Alors toute allocation $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ qui satisfait $4i-3$ (respectivement $4i-2$) doit être telle qu'il existe au moins un $\mathbf{x} \in Var_{2i-1} \cup Var_{2i}$ tel que $\{o_x, \overline{o_x}, p_x, \overline{p_x}\} \subset \pi_{4i-3}^{|i}$ (respectivement $\pi_{4i-2}^{|i}$), car sinon on pourrait déduire un modèle de χ_{2i-1} ou χ_{2i} à partir de $\pi_{4i-3}^{|i}$ (respectivement $\pi_{4i-2}^{|i}$). En conséquence, aucun des agents $4i$ et $4i-1$ ne peut être satisfait dans ce cas : le nombre maximal d'agents qu'il est possible de satisfaire est 2. Puisque toute allocation de la forme $\overrightarrow{\pi}^{v_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait les deux agents $4i-1$ et $4i$, une telle allocation satisfait un nombre maximal d'agents dans ce cas. Cette allocation est aussi de manière évidente sans envie, puisque ni d_{2i} ni d_{2i-1} ne sont dans les parts des agents $4i-1$ et $4i$, et donc les deux autres agents ne peuvent les envier.

Supposons que seule χ_{2i-1} est satisfiable. Alors toute allocation satisfaisant les deux agents $4i-3$ et $4i-2$ doit satisfaire χ'_{2i-1} pour l'un de ces deux agents, et χ'_{2i} pour l'autre (à cause de d_{2i} et d_{2i-1}). Puisque χ_{2i} n'est pas satisfiable, dans ce cas ni $4i-1$ ni $4i$ ne peuvent être satisfaits par $\overrightarrow{\pi}^{|i}$, pour les mêmes raisons que ci-dessus. Nous pouvons en déduire qu'il n'est pas possible de satisfaire les 4 agents en même temps. Il n'est pas possible non plus de satisfaire 3 agents avec à la fois $4i-3$ et $4i-2$ satisfaits. Maintenant considérons l'allocation $\overrightarrow{\pi}^{M_{2i-1},v_{2i}}$, M_{2i-1} étant un modèle de χ_{2i-1}. D'après le lemme 15, $\overrightarrow{\pi}^{M_{2i-1},v_{2i}}$ satisfait 3 agents : $4i-3$, $4i-1$ et $4i$. Cette allocation n'est pas sans envie, mais aucune allocation satisfaisant autant d'agents ne peut l'être dans ce cas (car soit $4i-3$ soit $4i-2$ reste insatisfait dans une telle allocation et donc envie son partenaire).

Enfin, supposons que les deux formules χ_{2i-1} et χ_{2i} sont satisfiables, et soient M_{2i-1} et M_{2i} leurs modèles. Alors d'après le lemme 15, $\pi^{M_{2i-1},M_{2i}}$ satisfait les 4 agents, satisfaisant ainsi un nombre maximal d'agents et étant de manière évidente sans envie. ▲

Nous pouvons à présent conclure la preuve. D'après le lemme 14, il existe une allocation sans envie parmi celles qui satisfont un nombre maximal d'agents pour $\mathcal{P}(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ si et seulement s'il existe une allocation découpable $\overrightarrow{\pi}$ telle que $\forall i \in [\![1, n/2]\!]$, $\overrightarrow{\pi}^{|i}$ est sans envie et satisfait un nombre maximal d'agents pour $\mathcal{P}^{|i}$. D'après le lemme 15, il existe une allocation sans envie $\pi^{|i}$ qui satisfait un nombre maximal d'agents pour $\mathcal{P}^{|i}$ si et seulement si soit aucune des deux formules χ_{2i-1} et χ_{2i} n'est satisfiable, soit toutes les deux le sont. Maintenant supposons que l'indice maximum j tel que χ_j est satisfiable est un nombre impair (disons $2i-1$). Dans ce cas, il n'y a aucune allocation sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents pour $\mathcal{P}^{|i}$ puisque χ_{2i-1} est satisfiable mais que χ_{2i} ne l'est pas. Réciproquement, supposons que l'indice j maximum tel que χ_j est satisfiable est un nombre pair (disons $2i$). Dans ce cas, il existe une allocation sans envie parmi celles qui satisfont un nombre maximal d'agents pour tout $\mathcal{P}^{|k}$, puisque pour tout $\mathcal{P}^{|k}$ soit les deux formules χ_{2k-1} et χ_{2k} sont satisfiables (si $k \leq i$), soit aucune d'entre elles ne l'est (si $k > i$).

Nous avons donc mis en évidence une réduction polynomiale du problème $[\textsf{MAX-INDEX-SAT}]_{odd}$ vers le problème d'existence d'une allocation sans envie qui satisfait un nombre maximal d'agents, ce qui prouve la Θ_2^{p}-complétude. ▲

4.1.2 Préférences non-dichotomiques

4.1.2.1 Préférences logiques générales

Nous allons maintenant considérer le cas où les préférences ne sont plus dichotomiques. Encore une fois, comme nous nous sommes attachés à le démontrer au chapitre 3, nous avons besoin d'un langage de représentation compacte de préférences. Comme nous l'avons vu, de nombreux langages existent. Nous allons nous restreindre aux langages dérivés de la logique propositionnelle, ou plus précisément aux langages définis comme suit :

Définition 4.1 (Langage de représentation compacte sous forme logique) *Soit* $\mathcal{R}_{\mathscr{O}}$ *un langage de représentation compacte de préférences fondé sur* $\mathscr{O}$. $\mathcal{R}_{\mathscr{O}}$ *est un* langage compact sous forme logique *si et seulement si :*

(a) il est capable d'exprimer toute structure de préférence dichotomique de manière aussi compacte que le langage $\mathcal{R}_{dicho}$, *c'est-à-dire que toute formule de* $\mathcal{L}_{dicho}$ *peut être transformée en temps polynomial en une formule de* $\mathcal{L}_{\mathscr{O}}$ *;*

(b) la comparaison de deux ensembles d'objets peut être effectuée en temps polynomial.

Ces deux conditions ne sont pas très restrictives en pratique, et sont vérifiées par de nombreux langages dédiés à la représentation compacte de préférences, tels que ceux que l'on a introduits dans le chapitre 3. De manière intéressante, la proposition 4.2 peut être étendue à n'importe quel langage de représentation de ce type :

Corollaire 2 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec des agents ayant des préférences monotones exprimées de manière compacte sous forme logique est* Σ_2^{p}*-complet.*

Démonstration Le problème [EEF EXISTENCE] peut être résolu grâce à l'algorithme suivant :

1. deviner une allocation $\overrightarrow{\pi}$ de manière non-déterministe :
2. vérifier que cette allocation est sans envie ;
3. vérifier que cette allocation est Pareto-efficace.

D'après la condition (b), le deuxième pas de l'algorithme peut être effectué en temps polynomial, puisqu'il ne requiert qu'un nombre quadratique d'oracles polynômiaux. Selon la condition (b) à nouveau, le problème de vérification de la Pareto-efficacité d'une allocation est dans co-NP. Ainsi, l'algorithme non-déterministe précédent utilise un nombre polynomial d'oracles NP et s'exécute en temps polynomial. D'où l'appartenance à Σ_2^{p}.

La Σ_2^{p}-difficulté est une conséquence directe de la proposition 4.2 et de la condition (a). ▲

4.1.2.2 Préférences numériques sous forme logique

Pour ce dernier résultat, les préférences n'ont pas à être numériques, puisque la Pareto-efficacité et l'absence d'envie sont des notions purement ordinales. Maintenant, si les préférences sont numériques, ce qui implique la possibilité de les comparer et de les agréger, nous pouvons nous intéresser à un critère d'efficacité fondé sur la maximisation d'une fonction d'utilité collective à la place de la Pareto-efficacité. Nous allons nous concentrer sur les deux fonctions d'utilité collective les plus courantes, que nous avons introduites aux chapitre 1 : les fonctions d'utilité égalitariste et utilitariste classique, autrement dit la fonction min et la fonction somme.

Puisque nous ne sommes plus dans le cadre ordinal (ou dichotomique), nous nous devons de définir précisément ce que l'on entend par représentation compacte de préférences numériques. Nous allons bien entendu choisir le langage à base de formules pondérées, que nous avons introduit dans le chapitre 3, et qui est à la base du langage de représentation compacte du problème de partage qui a été introduit dans la définition 3.38. Rappelons brièvement la définition de ce langage.

Les préférences des agents sont représentées par un ensemble de formules logiques pondérées $\Delta_i = \{(\psi_{i,1}, w_{i,1}), \ldots, (\psi_{i,m_i}, w_{i,m_i})\}$. Nous supposerons ici que les poids sont dans $\mathbb{Z}$. Étant donné l'ensemble de formules précédent, l'utilité de l'agent i correspondant est définie comme suit :

$$u_i : \begin{array}{lll} \wp(\mathscr{O}) & \to & \mathbb{Z} \\ \pi & \mapsto & \sum_{k=1}^{m} w_m \times \sigma(\Delta, \pi) \end{array} \qquad \sigma(\delta, \pi) = \begin{cases} w(\delta) & \text{si } \delta \text{ est satisfaite par } \pi, \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les préférences exprimées dans ce langage sont monotones si et seulement si toutes les formules sont positives, de même que les poids.

Les résultats de complexité que nous allons introduire dans cette section sont centrés sur le langage de représentation sous forme logique pondérée, mais restent valable pour tout langage de représentation numérique compact «raisonnable» qui étend la logique pondérée. Plus précisément, ces résultats s'étendent à tout langage de représentation compacte numérique sous forme logique, cette notion étant définie comme suit :

Définition 4.2 (Langage de représentation compacte numérique sous forme logique) *Soit $\mathcal{R}_{\mathscr{O}}$ un langage de représentation compacte de préférences ordinales fondé sur $\mathscr{O}$. $\mathcal{R}_{\mathscr{O}}$ est un* langage compact numérique sous forme logique *si et seulement si :*

(a) il est capable d'exprimer toute structure de préférence dichotomique de manière aussi compacte que le langage $\mathcal{R}_{weighted}$, c'est-à-dire que toute formule de $\mathcal{L}_{weighted}$ peut être transformée en temps polynomial en une formule de $\mathcal{L}_{\mathscr{O}}$;

(b) la comparaison de deux ensembles d'objets peut être effectuée en temps polynomial.

Bien entendu, puisqu'un langage compact numérique sous forme logique est aussi un langage compact sous forme logique, le résultat de complexité du corollaire 2 reste valable. Cependant il apparaît que cette complexité décroît lorsque la Pareto-efficacité est remplacée par une notion plus faible : la maximisation de l'une des fonctions d'utilité collective égalitariste ou utilitariste classique.

Proposition 4.13 *Étant donnée une collection de fonctions d'utilité sur $\wp(\mathscr{O})$, spécifiées dans un langage compact numérique sous forme logique,*

- ▷ *le problème d'existence d'une allocation sans envie parmi celles qui maximisent la fonction d'utilité collective utilitariste classique est Δ_2^{p}-complet, même si le nombre d'agents est fixé à 2 et même si les agents ont des préférences identiques ;*
- ▷ *le problème d'existence d'une allocation sans envie parmi celles qui maximisent la fonction d'utilité collective égalitariste est Δ_2^{p}, même si le nombre d'agents est fixé à 2.*

Démonstration Pour ces deux résultats, l'appartenance à Δ_2^{p} est facile à démontrer, en considérant le fait que la valeur maximum de l'utilité collective peut être calculée par dichotomie sur l'ensemble de toutes les valeurs possibles de l'utilité collective. Puisqu'il y en a un nombre exponentiel, nous avons besoin d'un nombre polynomial d'oracles NP pour cela. Après cette opération, il suffit de deviner une allocation et de vérifier qu'elle est sans envie et qu'elle maximise l'utilité collective, ce qui ajoute simplement un autre oracle NP.

La difficulté est obtenue dans les deux cas utilitariste classique et égalitariste par une simple réduction vers une instance du problème de partage équitable avec préférences exprimées à l'aide de la logique pondérée, depuis le problème suivant :

Problème 6: $[\text{MAX-SAT-ASG}]_{even}$ [Wagner, 1987]

INSTANCE :	Une formule propositionnelle χ en forme normale conjonctive, sur un ensemble de variables propositionnelles $V = \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, et une fonction poids w sur les interprétations $v : Var \to \{0,1\}$, définie par $w(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i v(\mathbf{x_i}) \times 2^{i-1}$.
QUESTION :	Est-ce que $\max_{M \text{ modèle de } \chi} w(M)$ est un nombre pair (en d'autres termes la variable $\mathbf{x_1}$ est-elle falsifiée dans le modèle de poids maximal) ?

Nous allons supposer que la formule χ possède au moins un modèle M tel que $M \not\models \mathbf{x_1}$. Cela ne change rien à la complexité, car si $\mathbf{x_1}$ est vérifié dans tous les modèles de χ, la réponse au problème $[\text{MAX-SAT-ASG}]_{even}$ est clairement négative. En conséquence, toute instance (χ, V) sans aucune hypothèse sur χ peut être résolue en vérifiant d'abord si $\neg\mathbf{x_1} \wedge \chi$ est insatisfiable (c'est un problème co-NP-complet), et ensuite, si ce n'est pas le cas, en résolvant le problème $[\text{UNSAT-OR-MAX-SAT-ASG}]_{even}$ sur une instance qui possède au moins un modèle falsifiant $\mathbf{x_1}$.

Utilitarisme classique : À partir d'une instance (χ, V) du problème $[\text{MAX-SAT-ASG}]_{even}$, nous créons l'instance $\mathcal{P}(\chi, V)$ comme suit :

Agents : 2 agents ;

Objets : pour chaque littéral $\mathbf{x_i}$ de χ, nous créons deux objets o_i et o'_i, excepté pour $\mathbf{x_1}$, pour lequel nous n'introduisons qu'un seul objet o_1, et enfin nous ajoutons deux objets y et y' ;

Préférences : les agents 1 et 2 ont les préférences identiques suivantes : $((\psi \wedge \mathbf{y}) \vee (\psi' \wedge \mathbf{y'}), 2^{n+1}), (\mathbf{o_1} \wedge \mathbf{y}, 1), \ldots, (\mathbf{o_n} \wedge \mathbf{y}, 2^{n-1}), (\mathbf{o'_2} \wedge \mathbf{y'}, 2), \ldots, (\mathbf{o'_n} \wedge \mathbf{y'}, 2^{n-1})$, avec ψ la formule construite à partir de χ dans laquelle on a remplacé chaque symbole $\mathbf{x_i}$ par $\mathbf{o_i}$, et ψ' la formule construite à partir de χ dans laquelle on a remplacé chaque symbole $\mathbf{x_i}$ par $\mathbf{o'_i}$ (excepté $\mathbf{x_1}$ remplacé par $\mathbf{o_1}$).

Soit (M_1, M_2) un couple de modèles de χ (avec éventuellement $M_1 = M_2$) tel que $M_2 \not\models \mathbf{x_1}$. Nous définissons alors l'allocation $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$ de la manière suivante :$\pi_1^{M_1,M_2} = \{y\} \cup \{o_i \mid M_1 \models \mathbf{x_i}\}$ et $\pi_2^{M_1,M_2} = \{y'\} \cup \{o'_i \mid M_2 \models \mathbf{x_i}\}$.

La preuve est fondée sur le lemme suivant :

Lemme 17 *Il existe une allocation sans envie parmi celles qui maximisent la fonction d'utilité collective utilitariste classique pour $\mathcal{P}(\chi, V)$ si et seulement s'il existe deux modèles M_1 et M_2 de χ (avec éventuellement $M_1 = M_2$) avec $M_2 \not\models \mathbf{x_1}$, tels que $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$ est sans envie et maximise la fonction d'utilité collective utilitariste classique.*

Démonstration Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation qui maximise l'utilité collective utilitariste classique. Soit M un modèle de χ qui falsifie $\mathbf{x_1}$ (notre hypothèse est qu'il en existe au moins un). Alors $F(\pi_1^{M,M}) \models \psi \wedge y$ et $F(\pi_2^{M,M}) \models \psi' \wedge y'$, ce qui prouve que l'utilité individuelle des deux agents est d'au moins 2^{n+1}. Ainsi il existe au moins une allocation dont l'utilité sociale utilitariste classique est au moins égale à 2^{n+2}. En conséquence, toute allocation $\overrightarrow{\pi}$ maximisant la fonction d'utilité collective utilitariste doit être telle que $F(\pi_1) \vDash y \wedge \psi$ et $F(\pi_2) \vDash y' \wedge \psi'$ ou vice-versa. De plus, soit $o_1 \notin \pi_1$, soit $o_1 \notin \pi_2$. Supposons que $o_1 \in \pi_2$: échanger les parts des agents conduit à une allocation $\overrightarrow{\pi}'$ qui est complètement équivalente du point de vue de l'utilité collective et de l'absence d'envie, à cause du fait que les préférences sont identiques. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que $\overrightarrow{\pi}$ est tel que $o_1 \notin \pi_2$.

Puisque $\pi_1 \vDash \psi$, il existe un modèle M_1 de χ tel que $\pi_1 = \{y\} \cup \{o_i \mid M_1 \vDash \mathbf{x_i}\} \cup \mathscr{S}_1$, où $\mathscr{S}_1 \subseteq \{o_1, o'_2, \ldots, o'_n\}$. De manière similaire, il existe un modèle M_2 tel que $M_2 \nvDash \mathbf{x_1}$, et $\pi_2 = \{y'\} \cup \{o'_i \mid i > 1,\ M_2 \vDash \mathbf{x_i}\} \cup \mathscr{S}_2$, où $\mathscr{S}_2 \subseteq \{o_1, \ldots, o_n\}$. Considérons maintenant l'allocation $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$, qui est bien définie, puisque $M_2 \nvDash \mathbf{x_1}$. On a $u_1(\overrightarrow{\pi}) = u_1(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2})$, puisque les objets o'_i ne satisfont aucune formule de l'agent 1 sans y' (qui a été donné à l'agent 2), et $u_2(\pi) = u_2(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2})$ pour les mêmes raisons. En d'autres termes, $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$ donne la même utilité que $\overrightarrow{\pi}$ aux deux agents. $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$ est donc sans envie et maximise l'utilité collective utilitariste classique. ▲

D'après le lemme 17, nous pouvons donc restreindre notre problème aux allocations de la forme $\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}$. Nous avons, pour tous M_1 et M_2 définis comme précédemment, $u_1(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}) = 2^{n+1} + w(M_1)$ et $u_2(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}) = 2^{n+1} + w(M_2)$; donc $g^\star(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}) = 2^{n+2} + w(M_1) + w(M_2)$. Nous avons : $\operatorname{argmax}_{\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}} g^\star(\overrightarrow{\pi}^{M_1,M_2}) = \overrightarrow{\pi}^{\operatorname{argmax}_{(M_1,M_2)}\{w(M_1)+w(M_2) \mid M_1 \nvDash \mathbf{x_1} \text{ ou } M_2 \nvDash \mathbf{x_1}\}}$. Étant donnée la symétrie du problème, nous pouvons supposer que seul M_2 doit satisfaire $M_2 \nvDash \mathbf{x_1}$, donc la précédente allocation devient : $\overrightarrow{\pi}^{M_{opt},\operatorname{argmax}_{M_2}\{w(M_2) \mid M_2 \nvDash \mathbf{x_1}\}}$, où M_{opt} est le modèle de χ de poids maximal.

Supposons que $M_{opt} \nvDash \mathbf{x_1}$, alors l'allocation qui maximise l'utilité collective utilitariste est $\overrightarrow{\pi}^{M_{opt},M_{opt}}$, et elle est clairement sans envie, car les deux agents ont la même utilité. Maintenant supposons que $M_{opt} \vDash \mathbf{x_1}$. Dans ce cas, l'allocation qui maximise l'utilité collective utilitariste est $\overrightarrow{\pi}^{M_{opt},M_{opt'}}$, où $M_{opt'}$ est le modèle de χ de poids maximal qui falsifie $\mathbf{x_1}$. Nous avons $w(M_{opt'}) < w(M_{opt})$, et donc $u_1(\overrightarrow{\pi}^{M_{opt},M_{opt'}}) > u_2(\overrightarrow{\pi}^{M_{opt},M_{opt'}})$, donc l'allocation n'est pas sans envie.

Cette réduction est clairement polynomiale (rappelons que les poids 2^{n+1} peuvent être encodés sur un espace de taille linéaire). Cela prouve la proposition dans le cas utilitariste classique.

Égalitarisme : À partir d'une instance (χ, V) de $[\textsf{MAX-SAT-ASG}]_{even}$, nous créons l'instance $\mathcal{P}(\chi, V)$ de la manière suivante :

Agents : 2 agents ;

Objets : pour chaque littéral $\mathbf{x_i}$ de χ, nous créons deux objets o_i et o'_i, et nous ajoutons deux objets y et y' ;

Préférences : les préférences de l'agent 1 sont $(\mathbf{o_1}, 1), \ldots, (\mathbf{o_n}, 2^{n-1}), (\psi \wedge \mathbf{y}, 2^n)$, et les préférences de l'agent 2 sont $(\mathbf{y} \vee \mathbf{y'}, 2^{2n}), (\mathbf{o_1}, 1)$, avec ψ la formule χ dans laquelle chaque symbole $\mathbf{x_i}$ a été remplacé par $\mathbf{o_i}$.

Toute allocation qui maximise l'utilité collective égalitariste doit donner une utilité d'au moins 2^{2n} à l'agent 2. Dans ce cas, la valeur de l'utilité collective sera déterminée par l'utilité de l'agent 1, car son utilité ne peut pas être supérieure à 2^{2n}. En conséquence, maximiser l'utilité collective revient dans ce cas à maximiser l'utilité de l'agent 1, ou en d'autres termes à lui donner les objets qui correspondent au modèle de χ de poids maximum. Si $\mathbf{x_1}$ est instancié à vrai dans ce modèle, alors o_1 est donné à l'agent 1, et puisque y est aussi donné à cet agent, l'agent 2 pourrait avoir une utilité strictement supérieure avec la part de l'agent 1. En conséquence, cette allocation n'est pas sans envie. Si $\mathbf{x_1}$ est instancié à faux dans ce dernier modèle, alors o_1 n'est pas donné à l'agent 1 et peut donc être donné à l'agent 2, produisant ainsi une allocation sans envie. La réduction étant clairement polynomiale, nous avons donc montré la Δ_2^{p}-difficulté pour le cas égalitariste. ▲

Nous pouvons remarquer dans le cas utilitariste classique de la preuve précédente que le résultat de Δ_2^{p}-difficulté subsiste si nous remplaçons le critère de maximisation de l'utilité collective utilitariste classique par la Pareto-efficacité. Cela suggère donc que dans le cas d'un langage de représentation compacte logique numérique, le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences identiques (et un nombre d'agents fixé à 2) est beaucoup plus difficile que dans le cas où les préférences sont dichotomiques. Formellement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.14 *Étant donnée une collection de n fonctions d'utilité identiques sur $\wp(\mathscr{O})$, spécifiées dans un langage compact numérique sous forme logique, le problème d'existence d'une allocation Pareto-efficace et sans envie est Δ_2^{p}-complet, même si $n = 2$ et que les préférences sont monotones.*

Démonstration Puisque les préférences sont identiques, toute allocation sans envie doit satisfaire les agents de manière égale. Ainsi, une allocation Pareto-efficace et sans envie, s'il y en a une, est une allocation qui donne une utilité de $\widehat{u}$ à tous les agents, et qui est maximale parmi l'ensemble des allocations qui satisfont tous les agents de manière égale. Cette valeur $\widehat{u}$ peut être calculée, comme dans la preuve précédente, à l'aide d'un nombre polynomial d'oracles NP. Ayant calculé cette valeur $\widehat{u}$, vérifier s'il existe une allocation Pareto-efficace et sans envie revient à vérifier s'il n'y a pas d'allocation qui donne une utilité d'au moins $\widehat{u}$ à tous les agents, et au moins $\widehat{u} + 1$ à un agent. Ce dernier problème est dans co-NP, et donc on ne rajoute qu'un seul appel à un oracle NP.

Pour la preuve de Δ_2^{p}-difficulté, on peut remarquer que la même réduction que celle utilisée dans le cas utilitariste classique de la preuve de la proposition 4.13 fonctionne dans ce cas, car une allocation de cette instance particulière est Pareto-efficace et sans envie si et seulement si elle est sans envie et maximise le bien-être collectif utilitariste. ▲

4.1.2.3 Préférences numériques additives

Nous allons nous pencher sur un dernier cas : celui des préférences numériques *additives*. Ces préférences, que nous avons introduites dans la section 3.2.4.1 sous le nom de préférences *modulaires* (ou 1-additives), sont un cas dégénéré des préférences à base de logique pondérée, où toutes les formules sont atomiques (c'est-à-dire que toutes les formules sont des littéraux positifs). Comme nous l'avons vu, les préférences d'un agent i s'expriment dans ce cas comme un ensemble Δ_i de paires (o_k, w_k) , où o_k est un objet et w_k est le poids (potentiellement nul) associé à cet objet. L'utilité de l'agent i est calculée par sommation des poids correspondant aux objets qui sont dans la part de l'agent i. Bien entendu, les préférences des agents sont monotones si et seulement si tous les nombres w_k sont positifs.

Ce langage n'est bien sûr pas une extension du langage des préférences dichotomiques. En conséquence, le résultat de difficulté précédent de s'étend pas aux préférences additives. Bien entendu, puisque nous sommes toujours capables de comparer deux alternatives en temps polynomial, l'appartenance à Σ_2^{p} est garantie.

Se pose donc la question de la complexité exacte du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences numériques. Notre intuition est que, malgré la simplicité apparente de ce langage de représentation de préférences, ce problème est aussi difficile que le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences dichotomiques :

Conjecture 1 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives numériques est Σ_2^{P}-complet, même si les préférences sont monotones.*

Tout ce que nous savons à propos de ce problème est qu'il est NP-difficile et qu'il appartient à Σ_2^{P}, mais sa complexité exacte reste inconnue à ce jour. Cependant, les choses sont beaucoup plus faciles si nous remplaçons le critère de Pareto-efficacité par la complétude de l'allocation. Ce cas a déjà été étudié dans la littérature [Lipton *et al.*, 2004], et nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.15 [Lipton *et al.*, 2004] *Le problème d'existence d'une allocation complète et sans envie pour des agents ayant des préférences numériques additives est* NP-*complet, même si les préférences sont monotones.*

D'autres restrictions du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives valent la peine d'être étudiées. Tout d'abord, nous allons nous intéresser comme dans le cas dichotomique la restriction aux préférences additives identiques :

Proposition 4.16 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec n agents ayant des préférences numériques additives identiques est* NP-*complet, pour tout $n \geq 2$ fixé. Ce résultat reste valable si nous nous restreignons aux préférences monotones.*

Démonstration L'appartenance à NP est facile à démontrer. Puisque toutes les préférences sont identiques (nous notons $(f(o_1), \ldots, f(o_p))$ le vecteur de poids associé au vecteur des objets $(o_1, \ldots, o_p)$), une allocation est Pareto-efficace si et seulement si elle attribue chaque objet o_j tel que $f(o_j) > 0$ à un agent, et laisse de côté tous les objets o_j tels que $f(o_j) \leq 0$. De plus, une allocation est sans envie si et seulement si elle donne la même utilité à tous les agents. Ces deux propriétés peuvent être vérifiées en temps polynomial, d'où l'appartenance à NP.

Nous allons montrer la difficulté du problème par une réduction depuis le problème [PARTITION] :

Problème 7: [PARTITION]

INSTANCE :	Un ensemble fini $\mathscr{S}$ et une taille $s(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in \mathscr{S}$.
QUESTION :	Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} s(a) = \sum_{a \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'} s(a)$?

À partir d'une instance donnée $(\mathscr{S}, s)$ du problème [PARTITION], nous créons l'instance $\mathcal{P}(\mathscr{S}, s)$ du problème [EEF EXISTENCE] comme suit :

Agents :	2 agents ;
Objets :	nous associons à chaque $a \in S$, un objet o_a ;
Préférences :	Les préférences des deux agents sont identiques et définies par la fonction taille sur les éléments de l'ensemble initial : $f(o_a) = s(a)$.

Il existe une allocation Pareto-efficace et sans envie pour l'instance $\mathcal{P}(\mathscr{S}, s)$ si et seulement s'il existe une allocation $\overrightarrow{\pi}$ telle que $\sum_{o \in \pi_1} f(o) = \sum_{o \in \pi_2} f(o)$, c'est-à-dire si et seulement si $(\mathscr{S}, s)$ est une instance positive du problème [PARTITION]. La réduction est clairement polynomiale, ce qui prouve la proposition. ▲

Intéressons-nous à un cas encore plus dégénéré de préférences numériques : le cas où les préférences sont additives, mais où toutes les utilités atomiques $f_i(o_j)$ (désignant le poids attribué à l'objet j par l'agent i) sont égales à 0 ou 1. En d'autres termes, soit un agent désire un objet, soit il ne le désire pas. Chaque agent essaie de maximiser le nombre d'objets désirés qu'il obtient.

Proposition 4.17 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives 0–1 (c'est-à-dire $\forall i, j,\ f_i(o_j) \in \{0, 1\}$) est NP-complet.*

Démonstration La Pareto-efficacité est aisée à vérifier dans ce cas. Nous pouvons tout d'abord enlever les objets qui n'apparaissent nulle part dans les préférences sans changer le problème. Après cette opération, une allocation est Pareto-efficace si et seulement si chaque objet o_j est donné à un agent i tel que $f_i(o_j) = 1$, et ce pour les raisons suivantes. ($\Rightarrow$) Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation Pareto-efficace, et supposons qu'il existe un o_j qui n'est donné à aucun agent, ou bien qui est donné à un agent i tel que $f_i(o_j) = 0$. Soit k un agent tel que $f_k(o_j) = 1$ (il y en a forcément un puisque nous avons laissé de côté les objets non désirés lors de la dernière opération). Alors le fait de donner l'objet o_j à l'agent k augmente son utilité sans changer l'utilité des autres agents. Donc $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-dominé. ($\Leftarrow$) Soit $\overrightarrow{\pi}$ une allocation telle que tout objet o_j est donné à un agent i tel que $f_i(o_j) = 1$, et supposons que $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-dominée par une allocation $\overrightarrow{\pi}'$ donnée. Alors $\sum_{i \in \mathscr{N}} f_i(\pi'_i) = \sum_{i \in \mathscr{N}} \sum_{o_j \in \pi'_i} f_i(o_j) > \sum_{i \in \mathscr{N}} f_i(\pi_i) = \sum_{i \in \mathscr{N}} \sum_{x_j \in \pi'_i} f_i(x_j) = p$. Donc il existe au moins un $f_i(o_j)$ tel que $f_i(o_j) > 1$, ce qui est impossible en vertu de notre restriction aux préférences 0–1.

Cela nous donne donc un moyen simple de vérifier la Pareto-efficacité, juste en calculant la somme des utilités et en déterminant si elle est égale au nombre p d'objets qui sont désirés par au moins un agent. Comme à l'accoutumée, l'absence d'envie peut être vérifiée en temps polynomial ; donc le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives 0–1 est dans NP.

La complétude peut être démontrée par une réduction polynomiale depuis le problème [EXACT COVER BY 3-SETS], dont nous rappelons la définition :

Problème 4 (rappel): [EXACT COVER BY 3-SETS] [Karp, 1972]	
INSTANCE :	Un ensemble $\mathscr{S}$ de taille $3q$, et une collection $C = (\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{\lvert C \rvert})$ de sous-ensembles à 3 éléments de $\mathscr{S}$
QUESTION :	C contient-il une couverture exacte pour $\mathscr{S}$, c'est-à-dire une sous-collection $C' \subseteq C$ telle que chaque élément de $\mathscr{S}$ apparaît dans exactement un membre de C' ?

Étant donnée une instance $(\mathscr{S}, C = (\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{\lvert C \rvert}))$ du problème [EXACT COVER BY 3-SETS], nous créons l'instance $\mathcal{P}(C, \mathscr{S})$ du problème [EEF EXISTENCE] définie comme suit (nous supposerons que les éléments de $\mathscr{S}$ sont notés a_i, avec $i \in [\![1, \lvert S \rvert]\!]$) :

Agents : un ensemble de $3\lvert C \rvert$ agents regroupés par triplets $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$;

Objets : un ensemble de $\lvert \mathscr{S} \rvert + 3\lvert C \rvert$ objets $\mathscr{O} = \mathscr{M} \cup \mathscr{D}$ ($\mathscr{M}$ pour «*main*», principaux, et $\mathscr{D}$ pour «*dummy*», factices), avec $\mathscr{M} = \{m_1, \ldots, m_{\lvert \mathscr{S} \rvert}\}$, et $\mathscr{D} = \bigcup_{i \in [\![1, \lvert C \rvert]\!], j \in \{1,2,3\}} \{d_{i,j}\}$;

Préférences : les agents de $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$ désirent tous le même ensemble d'objets $\bigcup_{a_k \in \mathscr{C}_i} \{m_k\} \cup \{d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}\}$ (les trois objets correspondant à $\mathscr{C}_i$ plus les trois objets factices $d_{i,j}$).

S'il existe une couverture exacte C' pour l'instance $(C, \mathscr{S})$, alors nous allons considérer l'allocation suivante : chaque agent du triplet $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$ obtient respectivement $d_{i,1}$, $d_{i,2}$, et $d_{i,3}$, et si $\mathscr{C}_i \in C'$, chacun de ces trois agents obtient l'un des trois objets m_k correspondant aux éléments de l'ensemble $\mathscr{C}_i$. Cette allocation est admissible et Pareto-efficace (car tous les objets sont alloués). Elle est aussi sans envie, pour les raisons suivantes :

- ▷ Les agents du même triplet ne peuvent pas s'envier les uns les autres, car ils sont tous également satisfaits.

▷ Un agent k_1 ne peut envier un agent k_2 faisant partie d'un autre triplet que lui, puisque les seuls objets que k_1 peut envier dans la part de k_2 sont les m_i. k_2 obtenant au plus un seul m_i, et k_1 ayant une utilité au moins égale à 1, k_1 ne peut donc pas envier k_2.

La suite de la preuve est fondée sur le résultat suivant : si une allocation $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace et sans envie pour $\mathcal{P}(C, \mathscr{S})$ alors on doit avoir $\pi_{3i-2} \cup \pi_{3i-1} \cup \pi_{3i} = \bigcup_{a_k \in \mathscr{C}_i} \{m_k\} \cup \{d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}\}$ ou $\pi_{3i} \cup \pi_{3i-1} \cup \pi_{3i} = \{d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}\}$. Ce résultat est facile à démontrer. Puisque les agents du triplet $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$ sont les seuls à désirer les objets $d_{i,k}$, ces trois objets doivent être donnés à ces trois agents, pour que cette allocation soit efficace. Puisque ces trois agents ont les mêmes préférences, l'allocation doit les satisfaire de manière égale pour qu'elle soit sans envie. Ainsi, le nombre d'objets alloués aux trois agents doit être divisible par 3, ce qui donne seulement deux nombres possibles, 3 et 6, et donc seulement deux allocations possibles.

Supposons qu'il y ait une allocation Pareto-efficace et sans envie $\overrightarrow{\pi}$ pour $\mathcal{P}(C, \mathscr{S})$. Considérons la sous-collection $C' = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_{|C'|}\}$ constituée des triplets $\mathscr{C}_i$ de la collection C tels que $\pi_{3i-2} \cup \pi_{3i-1} \cup \pi_{3i} = \bigcup_{a_k \in \mathscr{C}_i} \{m_k\} \cup \{d_{i,1}, d_{i,2}, d_{i,3}\}$. Nous avons alors les résultats suivants.

▷ Les $\mathscr{C}_i$ sont disjoints deux à deux. Supposons qu'il y ait un couple (i, j) tel que $i \neq j$ et tel qu'il existe un élément a_k appartenant à la fois à $\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{C}_j$. Alors m_k est attribué à deux agents différents : un membre du triplet $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$, et un membre du triplet $\{3j+1, 3j+2, 3j+3\}$, ce qui est impossible..

▷ $\bigcup_{i \in [\![1, |C'|]\!]} \mathscr{C}_i = \mathscr{S}$. Soit a_k un élément de $\mathscr{S}$. Puisque $\overrightarrow{\pi}$ est Pareto-efficace, m_k doit être alloué à un agent qui le désire (disons que cet agent appartient au triplet $\{3j+1, 3j+2, 3j+3\}$), à moins que personne ne le désire, ce qui arrive lorsque $\bigcup_{i \in [\![1, |C|]\!]} \mathscr{C}_i \neq \mathscr{S}$. Alors, d'après le résultat précédent, tous les objets de $\bigcup_{a_l \in \mathscr{C}_j} \{m_l\}$ doivent être alloués à ce triplet. En conséquence, $\mathscr{C}_j \in C'$. Puisque $a_k \in \mathscr{C}_j$, a_k appartient à au moins un élément de la collection C'.

En conséquence, C' est une couverture exacte de $\mathscr{S}$, ce qui prouve au final la proposition. ▲

La proposition 4.17 et la conjecture 1 mettent en évidence l'existence d'un grand fossé de complexité (au moins si la conjecture est vraie) entre le problème pour lequel nous autorisons des poids quelconques, et le problème pour lequel nous imposons des poids 0 ou 1. La question naturelle que cela suscite est de savoir si cette chute de complexité est spécifique aux préférences 0–1 ou si elle subsiste dès que l'on fixe une borne supérieure pour les poids.

Conjecture 2 *La complexité du problème* [EEF EXISTENCE] *avec des préférences additives 0–1–…–k pour $k \geq 2$ fixé est aussi élevée que celle du problème général avec des préférences additives non bornées.*

La détermination de la complexité précise de ce problème reste un problème ouvert, mais comme cela est suggéré dans la conjecture, notre intuition est que ce problème est aussi difficile que le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences non bornées.

Un autre problème naturel est soulevé par la proposition 4.17 : quelle est la complexité du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences 0–1 *stratifiées* ? Par «préférences 0–1 stratifiées», nous entendons le fait que les préférences sont données par un ensemble de couples (o_k, p), où o_k est un objet et p est un niveau de priorité. La comparaison de deux ensembles d'objets s'effectue en comparant de manière lexicographique les vecteurs dont les composantes représentent, pour chaque indice i, le nombre d'objets de priorité i dans la part d'un agent. Notons que ce problème n'est pas une instance du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives, ni une instance du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences numériques sous forme logique. S'il est relativement évident de vérifier que ce problème reste dans Σ_2^{p}, en revanche, sa complexité précise reste inconnue à ce jour.

Enfin, nous allons nous pencher sur le cas où le nombre d'objets en jeu est plus petit que le nombre d'agents. On pourrait penser que dans ce cas, le problème devient trivial. Il l'est en effet pour des préférences monotones, mais il ne l'est apparemment plus si les préférences sont non monotones.

Proposition 4.18 *Soit $\mathcal{P}$ un problème d'allocation avec n agents ayant des préférences numériques additives et monotones. Supposons que tous les agents désirent au moins un objet, et soit p le nombre d'objets désirés par au moins un agent.*
- ▷ *Si $p < n$, alors il n'existe aucune allocation Pareto-efficace et sans envie.*
- ▷ *Si $p = n$, le problème de l'existence d'une allocation efficace et sans envie pour des agents ayant des préférences monotones et additives est dans* P.

Démonstration ▷ $p < n$ **:** Chaque objet étant désiré par au moins un agent, toute allocation Pareto-efficace est complète. Si le nombre d'agents p est strictement inférieur au nombre d'agents n, alors au moins un agent i est insatisfait. En conséquence, il y a un agent j qui obtient un objet désiré par i, ce qui crée de l'envie de la part de i. En conséquence, aucune allocation Pareto-efficace ne peut être sans envie.

▷ $p = n$ **:** Puisqu'il y a autant d'agents que d'objets, chaque agent doit recevoir un objet parmi ceux qu'il évalue le plus cher (c'est-à-dire un objet tel que $f_i(x)$ est maximal) pour qu'une allocation soit efficace et sans envie. En effet, si un agent i reçoit un objet qui n'est pas parmi ses préférés, cela veut dire (puisque toute allocation Pareto-efficace est complète) qu'un autre agent l'a reçu, suscitant ainsi l'envie de i. En conséquence, vérifier l'existence d'une allocation Pareto-efficace et sans envie se ramène dans ce cas à vérifier s'il est possible de donner à chaque agent un objet parmi ceux qu'il évalue le plus cher. Cela se ramène donc à vérifier s'il existe un couplage parfait dans le graphe constitué d'un nœud par agent d'un côté et d'un nœud par objet de l'autre, un arc connectant un nœud-agent i à un nœud-objet o si et seulement si l'objet o est parmi les objets qui ont la valuation la plus haute dans les préférences de i. Un tel couplage parfait peut être calculé en temps polynomial, d'où le résultat. ▲

Si le résultat précédent paraît relativement trivial, il est en revanche intéressant de constater qu'il ne tient plus du tout pour des préférences non monotones. Pis encore, dans ce cas, le problème est aussi complexe que le problème [EEF EXISTENCE] général avec des préférences additives, ce qui est pour le moins surprenant.

Proposition 4.19 *Le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences additives numériques et tel que le nombre d'objets est plus petit que le nombre d'agents a la même complexité que le problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences numériques additives et aucune hypothèse sur le nombre d'objets.*

Démonstration Soit $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$ une instance du problème [EEF EXISTENCE] avec des préférences numériques additives, n agents et p objets ($p > n$). Nous créons l'instance $\mathcal{P}(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$ du problème [EEF EXISTENCE] définie comme suit :

Agents :	$p + 3$ agents (le nombre d'agents n'est pas important, pourvu qu'il soit plus élevé que le nombre d'objets et que le nombre d'agents initial ;
Objets :	les p objets d'origine o_i plus deux objets factices o_1 et o_2 ;

Préférences : les préférences des n premiers agents sont les mêmes que dans l'instance initiale $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$; le préférences du $(n+1)^{\text{ème}}$ agent sont $f_{n+1}(d_1) = f_{n+1}(d_2) = 1$ et $f_{n+1}(o_j) = 0$ pour les autres objets o_j, et les préférences des agents restants sont $f_j(d_1) = 1$, $f_j(d_2) = -2$ et $f_j(\{o_j\}) = 0$ pour les objets restants.

S'il existe une allocation efficace et sans envie $\overrightarrow{\pi}$ pour $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$ alors on peut vérifier simplement que l'allocation qui donne les mêmes objets aux n premiers agents de $\mathcal{P}(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$, $\{d_1, d_2\}$ au $(n+1)^{\text{ème}}$ agent, et rien du tout aux agents restants est efficace et sans envie. Réciproquement, toute allocation Pareto-efficace et sans envie pour $\mathcal{P}(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$ conduit à une allocation Pareto-efficace et sans envie pour $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\dots, f_i(o_j), \dots))$ en restreignant cette allocation aux n premiers agents et à tous les objets sauf les objets factices. ▲

4.1.3 Conclusion

Nous avons donc identifié la complexité exacte du problème d'existence d'une allocation efficace et sans envie lorsque les préférences des agents sont représentées sous forme compacte dans différents contextes : pour différentes notions de l'efficacité (Pareto-efficacité, complétude, nombre maximal d'agents, maximisation d'une fonction d'utilité collective), pour différents types de préférences (dichotomiques ou non) et pour diverses restrictions. Les résultats de complexité obtenus sont résumés dans la figure 4.1 et dans le tableau 4.1.

La grande complexité de ce problème d'existence dans de nombreux cas étudiés ici amène à se poser la question de la pertinence du critère d'absence d'envie. Certains travaux envisagent la question sous l'angle d'une approximation numérique du critère, fondée sur diverses définitions de la notion d'envie [Lipton *et al.*, 2004; Chevaleyre *et al.*, 2007a]. Une autre approche, fondée sur la définition d'un critère d'envie à portée limitée et prenant en compte une information incomplète des agents (un agent ne peut envier que des agents qui lui sont proches ou qu'il connaît) semble particulièrement intéressante, et n'a pas encore été étudiée, à notre connaissance, dans la littérature.

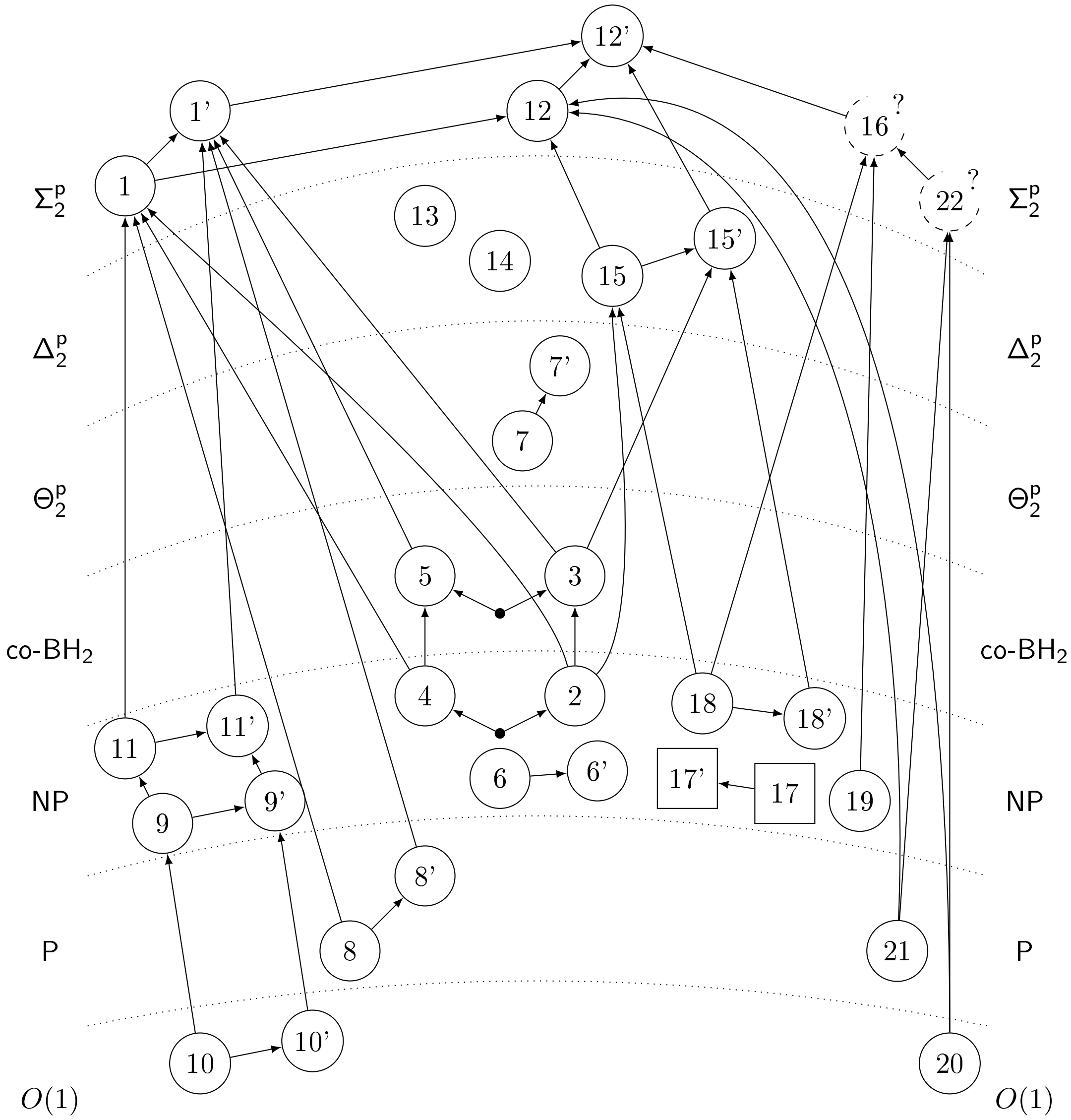
4.2 Maximisation de l'utilité collective

Nous allons maintenant nous intéresser à la complexité du deuxième problème introduit dans le chapitre 3 (définition 3.38), fondé sur une expression des préférences en logique pondérée, sur une expression logique des contraintes, et sur la définition d'une fonction d'utilité collective. Plus précisément, nous nous intéressons au problème de décision suivant :

Problème 8: [MAX-CUF]

INSTANCE : Une instance $(\mathscr{N}, \mathscr{O}, (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \mathscr{C}, \langle \mathscr{V}_{ind}, \geq_{ind}, \oplus \rangle, \langle \mathscr{V}, \geq, \rangle, g)$ du problème de partage de biens indivisibles et un élément $K \in \mathscr{V}$.
QUESTION : Existe-t-il une allocation admissible $\overrightarrow{\pi}$ telle que $u_c(\overrightarrow{\pi}) \geq K$?

Par la suite, nous supposerons que toutes les utilités sont exprimées par des entiers, autrement dit que $\mathscr{V}_{ind} = \mathscr{V} = \mathbb{N}$. Bien entendu, cette restriction n'affecte pas vraiment la portée des résultats de complexité introduits ici, ni leur importance. Nous ferons cependant une exception à cette hypothèse afin de pouvoir représenter l'ordre social leximin : pour ce problème particulier, nous supposerons que $\mathscr{V}_{ind} = \mathbb{N}$, $\mathscr{V} = \mathbb{N}^n$, $\succeq = \succeq_{leximin}$, et $g = Id$. Autrement dit, le problème de maximisation de l'utilité collective se ramène dans ce cas-là au problème de recherche des partages admissibles dont



1	Problème dont nous avons prouvé la complexité (la correspondance entre les nombres et les problèmes est spécifiée dans le tableau 4.1).
17	Problème dont la complexité était déjà connue dans la littérature.
22 ?	Problème dont la complexité reste inconnue.
•	Intersection des problèmes correspondant aux arcs sortants.
$i \rightarrow j$	Le problème i est inclus dans le problème j. Les arcs qui peuvent être obtenus par transitivité ont été omis.

Figure 4.1 — Les différents problèmes de décision concernant l'absence d'envie, et leurs classes de complexité et relations d'inclusion.

	Efficacité	nombre d'agents	préférences	monotonie	complexité
Préférences dichotomiques					
1, 1'	Pareto-eff.	non fixé	—	oui (1) ou non (1')	Σ_2^{p}-c.
2	Pareto-eff.	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	identiques	oui	NP-c.
3	Pareto-eff.	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	identiques	non	co-BH_2-c.
4	Pareto-eff.	2 agents	—	oui	NP-c.
5	Pareto-eff.	2 agents	—	non	co-BH_2-c.
6, 6'	all. complète	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	identiques ou pas	oui (6) ou non (6')	NP-c.
7, 7'	nb max d'agents	non fixé	—	oui (7) ou non (7')	Θ_2^{p}-c.
8, 8'	Pareto-eff.	—	disjonctions	oui (8) ou non (8')	P
9, 9'	Pareto-eff.	—	conjonctions	oui (9) ou non (9')	NP-c.
10, 10'	Pareto-eff.	—	conjonctions avec condition 4.1	oui (10) ou non (10')	$O(1)$
11, 11'	Pareto-eff.	—	$\mathcal{C}$ tq [SAT] ($\mathcal{C}$)$\in$ P et clos pour $\wedge$	oui (11) ou non (11')	NP-c.
Préférences non dichotomiques					
12, 12'	Pareto-eff.	non fixé	numériques	oui (12) ou non (12')	Σ_2^{p}-c.
13	utilitarisme cl.	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	numériques	non	Δ_2^{p}-c.
14	égalitarisme	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	numériques	non	Δ_2^{p}-c.
15, 15'	Pareto-eff.	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	numériques, identiques	oui (15) ou non (15')	Δ_2^{p}-c.
16	Pareto-eff.	non fixé	additives	non	Σ_2^{p}-c. ?
17, 17'	all. complète	non fixé	additives	oui (17) ou non (17')	NP-c.
18, 18'	Pareto-eff.	non fixé ou fixé avec $n \geq 2$	additives identiques	oui (18) ou non (18')	NP-c.
19	Pareto-eff.	—	additives 0–1	oui	NP-c.
20	Pareto-eff.	$>$ Nb d'objets	additives	oui	$O(1)$
21	Pareto-eff.	$=$ Nb d'objets	additives	oui	P
22	Pareto-eff.	$\geq$ Nb d'objets	additives	non	Σ_2^{p}-c. ?

Tableau 4.1 — L'ensemble des problèmes de partage dont la complexité a été étudiée dans cette section. Le résumé de leurs classes de complexité est représenté dans la figure 4.1.

les profils d'utilité individuelle sont non dominés pour l'ordre leximin. Pour simplifier les notations, nous noterons dans ce cas $g = \text{leximin}$.

4.2.1 Complexité du problème général

Pour commencer, nous nous intéressons à la complexité du problème général [MAX-CUF], sans restriction sur les contraintes ou les fonctions d'agrégation individuelle et collective. Il est immédiat d'après la définition 3.38 de constater qu'il est toujours possible de vérifier en temps polynomial si une allocation est admissible ou non. Nous ferons de plus l'hypothèse (non précisée dans cette même définition) que l'utilité collective d'une allocation peut aussi être calculée en temps polynomial. Cette hypothèse est raisonnable dans la mesure ou elle est vérifiée pour tous les opérateurs d'agrégation individuelle introduits lors de la définition du langage de représentation au chapitre 3 et pour toutes les fonctions d'utilité collective introduites au chapitre 1.

Ainsi, sous les hypothèses introduites ici, le problème [MAX-CUF] est dans NP, quelles que soient les contraintes d'admissibilité ou les demandes formulées par les agents. Il s'avère que dans le cas général, où l'on ne fait aucune restriction sur les contraintes, ce problème est NP-complet :

Proposition 4.20 (Problème général [MAX-CUF]) *Le problème [MAX-CUF] est NP-complet dès lors que l'introduction de n'importe quelle contrainte est autorisée.*

> **Démonstration** La preuve de cette proposition se fait par simple réduction du problème [SAT]. À toute formule propositionnelle φ dont les symboles sont $Var(\varphi)$ nous associons le problème d'allocation défini par $\mathscr{N} = \{1\}$, $\mathscr{O} = Var(\varphi) \cup \{o'\}$, avec $o' \notin Var(\varphi)$, $\mathscr{C} = \{\varphi\}$, $\Delta_1 = \{(o', 1)\}$, et des fonctions d'agrégation $\oplus$ et g complètement quelconques (mais monotones). On peut immédiatement remarquer qu'il existe un partage admissible si et seulement si φ est satisfiable. Donc il existe un partage $\overrightarrow{\pi}$ admissible tel que $u_c(\overrightarrow{\pi}) \geq 0$ si et seulement si φ est satisfiable : nous avons réduit une instance quelconque du problème [SAT] en une instance du problème [MAX-CUF]. La réduction est clairement polynomiale, ce qui prouve la proposition. ▲

Nous avons donc démontré la difficulté du problème dans le cas général où l'on ne s'impose aucune restriction sur les contraintes, et ce pour n'importe quel couple d'opérateurs d'agrégation fixés. Il est en conséquence naturel de s'interroger sur les cas pour lesquels la complexité de ce problème de décision tombe dans P, moyennant l'introduction d'hypothèses restrictives sur les contraintes ou les demandes, et selon le choix des opérateurs d'agrégation $\oplus$ et g. Nous considérons ici seulement le cas des opérateurs d'agrégation les plus classiques, c'est-à-dire $\oplus = +$ ou max, et $g = +$, min, ou leximin. Comme nous allons le voir, la plupart des cas analysés se ramènent à des instances de problèmes bien connus en théorie de la complexité.

4.2.2 Pas de contrainte

Nous commençons par analyser un cas peu intéressant : celui d'un problème de partage sans contrainte :

Proposition 4.21 (Problème [MAX-CUF] non contraint) *Toute instance du problème [MAX-CUF] dans laquelle $\mathscr{C} = \varnothing$ peut être résolue en temps polynomial.*

> **Démonstration** Bien entendu, ce résultat utilise l'hypothèse de monotonie des fonctions $\oplus$ et g, et le fait que l'on se restreint à des demandes positives. Considérons une

instance du problème [MAX-CUF] dans laquelle l'ensemble des contraintes est vide et considérons l'allocation $\widehat{\overrightarrow{\pi}}$ qui donne tous les objets à chaque agent. Cette allocation est admissible (nous rappelons que la contrainte de préemption n'est pas présente puisque l'ensemble des contraintes est vide), et maximise l'utilité collective, en vertu des hypothèses de monotonie des opérateurs d'agrégation et de positivité des demandes. On peut calculer en temps polynomial $u_c(\widehat{\overrightarrow{\pi}})$ et donc déterminer dans le même temps s'il existe une allocation admissible dont l'utilité collective est supérieure ou égale à K. ▲

4.2.3 Contraintes de préemption uniquement

Nous allons maintenant considérer le cas, relativement classique et donc plus intéressant que le cas précédent, d'une instance du problème [MAX-CUF] ne contenant aucune autre contrainte que la contrainte de préemption. Comme nous allons le voir, ce problème, qui semble très basique, est toutefois aussi difficile que le problème général, et ce même si l'on se restreint au choix des fonctions d'agrégation classiques décrits ci-avant.

Proposition 4.22 (Contrainte de préemption uniquement) *Le problème [MAX-CUF] restreint aux instances sans autre contrainte que la contrainte de préemption est* NP*-complet, même dans les cas particuliers où les opérateurs d'agrégation sont les suivants :*
- ▷ $g = +$ *;*
- ▷ $\oplus = +$ *ou* max*, et* $g = +$ *ou* min *ou* leximin.

Démonstration Bien entendu, l'appartenance à NP est immédiate. Il reste donc à prouver la difficulté pour les cas particuliers cités dans la proposition.
$g = +$ **(sans restriction sur $\oplus$) :** Nous allons utiliser une réduction depuis le problème [INDEPENDENT SET] :

Problème 9: [INDEPENDENT SET]	
INSTANCE :	Un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ et un entier K.
QUESTION :	Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S} \subseteq V$ de taille au moins K tel que pour tout couple (v, v') d'éléments de $\mathscr{S}$, $(v, v') \notin E$ (autrement dit, v et v' ne sont pas connectés dans $\mathcal{G}$) ?

Soit $((V, E), K)$ une instance du problème [INDEPENDENT SET], avec $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Nous considérons l'instance $\mathcal{P}((V, E), K)$ du problème [MAX-CUF] définie de la manière suivante :
- ▷ $\mathscr{N} = [\![1, n]\!]$;
- ▷ $\mathscr{O} = \{o_{\{v_i,v_j\}} \mid (v_i, v_j) \in E\}$ (nous créons un objet pour chaque arête du graphe initial ; précisons aussi que $o_{\{v_i,v_j\}} = o_{\{v_j,v_i\}}$) ;
- ▷ pour tout agent i, $\Delta_i = (\varphi_i, 1)$, avec $\varphi_i = \bigwedge_{(v_i,v_j)\in E} o_{\{v_i,v_j\}}$ (la conjonction de tous les objets correspondant aux arcs incidents de v_i) ;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus$ est quelconque (les agents n'ayant qu'une seule demande chacun, l'opérateur d'agrégation individuelle n'est pas important), et $g = +$;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure à K.

Supposons qu'il existe un ensemble indépendant $\mathscr{S}$ de taille plus grande que K dans le graphe (V, E). Alors soit $\overrightarrow{\pi}(\mathscr{S})$ l'allocation qui attribue à tous les agents i tels que $v_i \in \mathscr{S}$ l'ensemble des objets de leur conjonction. Cette allocation est admissible : si elle ne l'était pas, cela signifierait que deux agents i et j satisfaits par $\overrightarrow{\pi}(\mathscr{S})$ ont un objet en commun, donc que les nœuds qui leur correspondent dans (V, E) ont une arête adjacente en commun, ou en d'autres termes qu'ils sont connectés. Cela est rendu impossible par le fait que $\mathscr{S}$

est un ensemble indépendant. En outre, $\overrightarrow{\pi}(\mathscr{S})$ satisfait autant d'agents que le nombre de nœuds dans $\mathscr{S}$, donc $u_c(\overrightarrow{\pi}(\mathscr{S})) \geq K$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une allocation admissible $\overrightarrow{\pi}$ de $\mathcal{P}((V, E), K)$ dont l'utilité collective est supérieure ou égale à K. Il y a donc au moins K agents dont la part contient la conjonction des objets $o_{\{v_i,v_j\}}$ qu'ils désirent. Notons $\mathscr{S}(\overrightarrow{\pi})$ l'ensemble des nœuds v_i de V tels que i est satisfait par $\overrightarrow{\pi}$, et supposons qu'il existe deux nœuds v_i et v_j de $\mathscr{S}(\overrightarrow{\pi})$ qui sont connectés dans (V, E). Dans ce cas, l'objet $o_{\{v_i,v_j\}} = o_{\{v_j,v_i\}}$ apparaît dans la conjonction de l'agent v et dans celle de l'agent v', donc aussi dans leur part respective, ce qui est impossible en vertu de la contrainte de préemption. Donc $\mathscr{S}(\overrightarrow{\pi})$ est tel qu'il ne contient aucune paire de nœuds connectés, et est de taille supérieure ou égale à K, ce qui prouve au final la validité de la réduction.

$\oplus = \max$ **et** $g = \min$ **ou** leximin **:** Cette fois-ci, nous utilisons une réduction depuis le problème [SET PACKING] :

Problème 10: [SET PACKING]

INSTANCE :	Une collection C d'ensembles finis, et un entier K.
QUESTION :	Existe-t-il une sous-collection $C' \subseteq C$ d'ensembles disjoints tels que $\|C'\| \geq K$?

Soit (C, K) une instance du problème [SET PACKING]. Nous considérons l'instance $\mathcal{P}(C, K)$ du problème [MAX-CUF] définie de la manière suivante :

- ▷ $\mathscr{N} = \{1, \dots, K\}$;
- ▷ $\mathscr{O} = \bigcup_{\mathscr{S} \in C} \mathscr{S}$;
- ▷ pour tout agent i, $\Delta_i = \bigcup_{\mathscr{S} \in C}\{(\varphi_C, 1)\}$, avec $\varphi_C = \bigwedge_{o \in C} o$ (la conjonction de tous les objets du sous-ensemble C) ;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus = \max$ et $g = \min$;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure à 1.

Supposons que l'instance (C, K) soit une instance positive du problème [SET PACKING], et considérons un sous-ensemble $C' \subseteq C$ d'ensembles disjoints tel que $|C'| \geq K$. Nous définissons une allocation $\overrightarrow{\pi}(C')$ telle que $\forall i$, $\pi_i(C') \in C'$ (la part d'un agent i correspond à un élément particulier de C'), et $\forall j \neq i$, $\pi_i(C') \neq \pi_j(C')$ (les parts de deux agents différents correspondent à deux éléments différents de C'). Puisque $|C'| \geq K$, cette allocation est bien définie. Puisque les ensembles de C' sont disjoints, $\overrightarrow{\pi}(C')$ satisfait la contrainte de préemption. Enfin, puisque chaque agent voit l'une de ses demandes satisfaites, $u_c(\overrightarrow{\pi}(C')) = 1$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une allocation $\overrightarrow{\pi}$ telle que $u_c(\overrightarrow{\pi}) \geq 1$. Alors l'utilité individuelle est au moins égale à 1 pour chaque agent, ce qui signifie que chaque agent i voit au moins une de ses formules pondérées $(\varphi_{C_i}, 1)$ satisfaite. Soit C' la collection des sous-ensembles C_i. Alors très clairement C_i est une sous-collection de C par définition des préférences des agents. De plus, les ensembles de C' sont mutuellement disjoints car $\overrightarrow{\pi}$ respecte la contrainte de préemption. En outre, C' contient K éléments. C'est donc une sous-collection de C d'ensembles mutuellement disjoints et de taille K, ce qui prouve la validité de la réduction utilisée.

Enfin, notons que dans le problème $\mathcal{P}(C, K)$, toutes les solutions maximin-optimales ont un profil d'utilité de $(1, \dots, 1)$, donc elles sont toutes équivalentes au sens du leximin. En conséquence, l'ensemble des solutions maximin-optimales dans $\mathcal{P}(C, K)$ est égal à l'ensemble des solutions leximin-optimales, ce qui montre que la réduction précédente fonctionne aussi dans le cas leximin. ▲

Notons que ce résultat était déjà connu dans le cas particulier $(\oplus, g) = (+, g)$, puisqu'il s'agit d'un corollaire de la NP-difficulté du *Winner Determination Problem* dans les enchères combinatoires [Rothkopf *et al.*, 1998] ; ainsi, le problème [MAX-CUF] était déjà connu comme étant NP-complet dans ce cas. Cependant, les autres cas n'ont jamais été étudiés dans la littérature à notre connaissance.

Dans les cas précédents, une partie de la complexité semble provenir du fait que les agents ont des demandes complexes. On peut donc légitimement se demander ce qu'il advient de la complexité du problème [MAX-CUF] lorsque les demandes des agents sont additivement indépendantes, autrement dit, lorsque les formules pondérées sont atomiques.

Proposition 4.23 (Contrainte de préemption uniquement et demandes atomiques) *Le problème [MAX-CUF] restreint aux instances sans autre contrainte que la contrainte de préemption et pour lesquelles les préférences des agents sont atomiques est* NP*-complet, même dans le cas particulier où il n'y a que deux agents ayant des préférences identiques, avec des opérateurs d'agrégation* $(+, \min \,|\, \text{leximin})$.

Cependant, ce même problème est dans P *dans les cas suivants : (a)* $(\oplus, g) = (+, +)$ *; (b)* $(\oplus, g) = (\max, + | \min)$ *; (c)* $(\oplus, g) = (+, \min)$ *et les demandes ont toutes les mêmes poids.*

Démonstration Nous commençons par démontrer la NP-difficulté dans le cas $(+, \min \,|\, \text{leximin})$, ce qui prouvera bien-sûr la NP-complétude dans le cas général où l'on ne fait aucune hypothèse sur les opérateurs d'agrégation.

$\oplus = +$ **et** $g = \min$ **ou** leximin **:** La NP-difficulté du problème va être démontrée par réduction depuis le problème [PARTITION] :

Problème 7 (rappel): [PARTITION]

INSTANCE :	Un ensemble fini $\mathscr{S}$ et une taille $s(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in \mathscr{S}$.
QUESTION :	Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} s(a) = \sum_{a \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'} s(a)$?

Soit $(\mathscr{S}, s)$ une instance du problème [PARTITION], avec $\mathscr{S} = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Nous considérons l'instance $\mathcal{P}(\mathscr{S}, s)$ du problème [MAX-CUF] définie de la manière suivante :

- ▷ $\mathscr{N} = \{1, 2\}$;
- ▷ $\mathscr{O} = \{o_1, \ldots, o_p\}$ (nous créons un objet pour chaque élément de $\mathscr{S}$) ;
- ▷ $\Delta_1 = \Delta_2 = \{(o_1, s(a_1)), \ldots (o_p, s(a_p))\}$;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus = +$ et $g = \min$;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure à $K = \sum_{i=1}^{p} s(a_i)/2$.

En vertu de la contrainte de préemption, tout partage admissible complet correspond à une partition des objets $\mathscr{O}$ en deux sous-ensembles, et donc correspond à une partition des éléments de $\mathscr{S}$ en deux sous-ensembles (disjoints par définition). Puisque $\sum_{i=1}^{p} s(a_i) = 2K$, on a $u_1(\overrightarrow{\pi}) + u_2(\overrightarrow{\pi}) \leq 2K$ pour tout $\overrightarrow{\pi}$, et $u_1(\overrightarrow{\pi}) + u_2(\overrightarrow{\pi}) = 2K$ si et seulement si $\overrightarrow{\pi}$ est complet. En conséquence, il existe un partage $\overrightarrow{\pi}$ tel que $uc(\overrightarrow{\pi}) \geq K$ si et seulement si $u_1(\overrightarrow{\pi}) = u_2(\overrightarrow{\pi}) = K$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une partition des éléments de $\mathscr{S}$ en deux sous-ensembles $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'$ tels que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} s(a) = \sum_{a \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'} s(a) = K$. Nous avons prouvé le résultat dans le cas particulier où il n'y a que deux agents ayant des préférences identiques.

Bien entendu, cette réduction fonctionne aussi dans le cas où $g = \text{leximin}$.

Nous allons maintenant nous intéresser à un certain nombre de cas pour lesquels le problème est polynomial.

$\oplus = +$ **et** $g = +$ **:** Ce cas se ramène de manière évidente à un cas d'enchères standard (non combinatoires), et la solution est évidente : attribuer chaque objet à un agent qui l'évalue le plus cher de tous les agents conduit à une allocation optimale. D'où l'appartenance de ce problème à P.

$\oplus = \max$ **et** $g = +$ **:** Puisque $\oplus = \max$, nous pouvons nous restreindre aux allocations admissibles n'attribuant qu'un seul objet à chaque agent : nous pouvons reconnaître aisément un problème de couplage de poids maximal :

Problème 11: [MAXIMAL MATCHING]

INSTANCE :	Un graphe bipartite pondéré $\mathcal{G}(V = N_1 \cup N_2, E)$, avec $w(v, v')$ désignant le poids d'une arête $\{v, v'\}$, et un entier K.
QUESTION :	Existe-t-il un couplage de poids supérieur ou égal à K, c'est-à-dire un sous-ensemble $E' \subseteq E$ tel que $\sum_{\{v,v'\} \in E'} w(v, v') \geq K$, et $\forall v \in V$, $\nexists (v', v'') \in V^2$ tel que $\{v, v'\} \in E'$ et $\{v, v''\} \in E'$?

Pour une instance du problème [MAX-CUF] avec opérateurs $\oplus = \max$ et $g = +$, nous créons le graphe bipartite formé d'un côté des agents et de l'autre des objets. Dans ce graphe, une arête relie un objet à un agent si l'objet en question figure dans les préférences de cet agent. Le poids d'une telle arête correspond au poids de l'objet dans les préférences de l'agent. Tout couplage dans un tel graphe correspond à une allocation admissible attribuant au plus un objet à chaque agent. Le poids d'un tel couplage correspond à l'utilité collective de l'allocation associée. Il y a donc une allocation d'utilité collective supérieure ou égale à un entier K si et seulement s'il y a un couplage de poids supérieur ou égal à K dans le graphe bipartite. Le problème [MAXIMAL MATCHING] étant dans P, c'est donc aussi le cas pour le problème [MAX-CUF] dans ce cas particulier.

$\oplus = \max$ et $g = \min$: Une réduction depuis le problème [MAXIMAL MATCHING] similaire au cas précédent fonctionne dans ce cas. La construction du graphe à partir d'une instance de [MAX-CUF] s'effectue de la même manière, sauf que le poids d'une arête ne correspond pas au poids de l'objet dans les demandes de l'agent, mais est égal à 1 si ce poids est supérieur ou égal à K et 0 sinon. On cherche cette fois-ci un couplage de poids au moins n, c'est-à-dire un couplage parfait. S'il existe, il est possible de trouver une allocation admissible qui donne à chaque agent un objet d'utilité au moins K, donc il existe un partage admissible d'utilité collective au moins K. Sinon, il n'est pas possible de trouver un tel partage, donc l'utilité collective maximale est 0.

Nous pouvons remarquer en revanche que cette réduction ne fonctionne pas pour le cas $g =$ leximin. La complexité exacte de ce problème reste encore indéterminée.

$\oplus = +$ et $g = \min$, avec demandes de même poids : Ce cas ressemble beaucoup au premier cas dont nous avons démontré la NP-complétude. En revanche, le fait que les demandes soient toutes de même poids fait chuter la complexité et rend le problème polynomial. Voyons pourquoi. Tout d'abord, si les demandes sont toutes de poids w et que l'on cherche un partage d'utilité collective supérieure ou égale à K, nous pouvons transformer le problème en divisant les utilités par w : on se ramène ainsi à un problème (équivalent) de recherche d'un partage d'utilité collective supérieure ou égale à $K' = \lceil K/w \rceil$ dans une instance pour laquelle les poids de toutes les demandes sont égaux à 1. Nous pouvons réduire ce problème à un problème de flot dans le graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ suivant :

- ▷ $V = \mathscr{N} \cup \mathscr{O} \cup \{s, t\}$;
- ▷ $E = \{(s, i, K') | i \in \mathscr{N}\} \cup \{(o, t, 1) | o \in \mathscr{O}\} \cup \{(i, o, 1) | i \in \mathscr{N}, o \in \mathscr{O}$, et $(o, 1) \in \Delta_i\}$ (autrement dit, une arête de poids K' reliant la source s à tous les nœuds agents, une arête de poids 1 reliant tous les nœuds objets au puits, et une arête de poids 1 par couple (i, o) tel que o apparaît dans les demandes de l'agent i).

À chaque allocation admissible $\overrightarrow{\pi}$ telle que chaque agent ne reçoit pas plus de K' objets correspond un flot dans le graphe : pour chaque arête (s, i), la valeur du flot dans cette arête est le nombre d'objets obtenus par l'agent i (autrement dit, son utilité) ; pour chaque arête (i, o), la valeur du flot dans cette arête est 1 si $o \in \pi_i$, et 0 sinon ; pour chaque arête (o, t), la valeur du flot dans cette arête est 1 si o est donné à un agent, et 0 sinon. On peut vérifier facilement que ce flot est valide, et qu'il y a une bijection entre l'ensemble des flots valides dans le graphe $\mathcal{G}$ et l'ensemble des partages admissibles.

Supposons qu'il existe un partage admissible $\overrightarrow{\pi}$ d'utilité collective supérieure ou égale à K'. Alors il existe un partage admissible $\overrightarrow{\pi}'$ tel que chaque agent reçoit exactement K' objets (si un agent reçoit plus de K' objets dans $\overrightarrow{\pi}$, on peut lui en enlever jusqu'à arriver à K'). À l'allocation $\overrightarrow{\pi}'$ correspond un flot de $\mathcal{G}$, de valeur nK'. Réciproquement, s'il existe un flot de valeur nK' dans $\mathcal{G}$, alors il existe un partage admissible $\overrightarrow{\pi}$ tel que chaque agent reçoit exactement K' objets, et donc $u_c(\overrightarrow{\pi}) = K'$. Nous avons montré la validité de la réduction, ce qui prouve que le problème est dans P. ▲

4.2.4 Contraintes de volume uniquement

Comme nous l'avons précisé lors de l'introduction du modèle dans le chapitre 3, nous allons ici relâcher temporairement l'hypothèse d'expression des contraintes d'admissibilité en logique propositionnelle pure pour nous intéresser à la complexité des problèmes en présence de contraintes de volume. La notion de contrainte de volume a été introduite dans la section 1.1.2, lors de la définition de la notion de contrainte d'admissibilité.

Proposition 4.24 (Contraintes de volume uniquement) *Le problème [MAX-CUF] restreint aux instances sans autre contrainte que des contraintes de volume est* NP*-complet, même dans les cas particuliers où les demandes sont atomiques, et où les opérateurs d'agrégation* $(\oplus, g)$ *sont* $(+, (*))$, $((*), +)$ *ou* $(\max, \min \,|\, \text{leximin})$*, où* $(*)$ *désigne n'importe quel opérateur fixé.*

Démonstration $\oplus = +$ **ou** $g = +$ **:** Pour ces cas, relativement identiques, on reconnaît aisément une instance du problème sac-à-dos :

Problème 12: [KNAPSACK]

INSTANCE :	Un ensemble fini $\mathscr{S}$ une fonction de valeur $u : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$, une fonction de volume $v : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$, une capacité maximale v_{max} et un entier K.
QUESTION :	Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ tel que $\sum_{a \in \mathscr{S}'} v(a) \leq v_{max}$ et $\sum_{a \in \mathscr{S}'} u(a) \geq K$?

À partir d'un tel problème, on peut créer une instance du problème [MAX-CUF], avec un seul agent (donc l'opérateur g n'importe pas) ayant des demandes atomiques du type $(a, u(a))$ pour chaque élément $a \in \mathscr{S}$, l'opérateur d'agrégation individuel $\oplus = +$, et une contrainte de volume pesant sur tous les objets, le volume de chaque objet a étant égal à $v(a)$, et le volume maximal étant égal à v_{max}. Pour ce qui est du cas $((*), +)$, il suffit de remplacer l'agent unique par autant d'agents que d'objets, chaque agent désirant un seul objet.

$\oplus = \max$ **et** $g = \min$ **:** On montre la NP-complétude dans ce cas par réduction depuis le problème [HITTING SET] :

Problème 13: [HITTING SET]

INSTANCE :	Une collection C de sous-ensembles $\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n$ d'un ensemble $\mathscr{S}$ et un entier $K \leq \lvert\mathscr{S}\rvert$.
QUESTION :	Existe-t-il un sous-ensemble $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$, avec $\lvert\mathscr{S}'\rvert \leq K$, tel que $\mathscr{S}' \cap \mathscr{S}_i \neq \varnothing$ pour tout $\mathscr{S}_i \in C$?

À partir d'une instance $(C = \{\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n\}, K)$ de ce problème, nous créons l'instance de [MAX-CUF] suivante :

- ▷ $\mathscr{N} = \{1, \ldots, n\}$;
- ▷ $\mathscr{O} = \mathscr{S}$;

- ▷ une contrainte de volume telle que $v(o) = 1$ pour tous les objets de $\mathscr{O}$, et le volume maximal est K ;
- ▷ pour tout i, $\Delta_i = \{(o,1)|o \in \mathscr{S}_i\}$;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus = \max$ et $g = \min$;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure ou égale à 1.

Tout partage admissible correspond bien entendu à un sous-ensemble $\mathscr{S}'$ de $\mathscr{S}$ de taille inférieure ou égale à K en vertu de la contrainte de volume. De plus, pour tout partage $\overrightarrow{\pi}$, $u_c(\overrightarrow{\pi}) \geq 1$ si et seulement si chaque agent a au moins un objet qu'il désire, c'est-à-dire si $\mathscr{S}'$ contient au moins un objet de chaque sous-ensemble $\mathscr{S}_i$.

Bien entendu, ce résultat s'étend au cas $g = $ leximin. ▲

4.2.5 Contraintes d'exclusion uniquement

Enfin, le dernier cas que nous analysons est celui des contraintes d'exclusion globales, c'est-à-dire s'appliquant à tous les agents et non à des agents particuliers.

Proposition 4.25 (Contraintes d'exclusion globales uniquement) *Le problème [MAX-CUF] restreint aux instances sans autre contrainte que des contraintes d'exclusion globales est* NP-*complet, même dans les cas particuliers où les opérateurs d'agrégation* $(\oplus, g)$ *sont* $(+, (*))$ *ou* $(\max, +|\min|\text{leximin})$.

Démonstration $\oplus = +$ **:** Ce cas peut être traité par une réduction depuis le problème 13, [HITTING SET]. À partir d'une instance $(C = \{\mathscr{S}_1, \ldots, \mathscr{S}_n\}, K)$ de ce problème, nous créons l'instance de [MAX-CUF] suivante :

- ▷ $\mathscr{N} = \{1\}$;
- ▷ $\mathscr{O} = \mathscr{S}$;
- ▷ pour chaque $\mathscr{S}_i \in C$, nous créons une contrainte d'exclusion empêchant l'attribution simultanée de tous les objets de $\mathscr{S}_i$;
- ▷ $\Delta_1 = \{(o,1)|o \in \mathscr{S}\}$;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus = +$ et g est quelconque (il n'y a qu'un agent, donc g ne compte pas) ;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure ou égale à $|\mathscr{S}| - K$.

Puisqu'un objet au moins de chaque contrainte d'exclusion ne doit pas être attribué, tout partage admissible $\overrightarrow{\pi}$ correspond à un sous-ensemble π_1 des objets de $\mathscr{S}$ tels qu'au moins un objet de chaque $\mathscr{S}_i$ n'est pas attribué, c'est-à-dire que $\mathscr{S} \setminus \pi_1$ est un *hitting set*. Réciproquement, à chaque *hitting set* correspond un partage admissible pour les même raisons. En conséquence, il existe un partage admissible d'utilité collective supérieure ou égale à $|\mathscr{S}| - K$ si et seulement s'il existe un *hitting set* de cardinalité au plus K.

$\oplus = \max$ **et** $g = \min|\text{leximin}$ **:** Nous utilisons ici une réduction directement depuis le problème [SAT] (problème 19). Soit $\varphi = Cl_1 \wedge \cdots \wedge Cl_n$ une formule en forme normale conjonctive (CNF). On crée l'instance de [MAX-CUF] suivante :

- ▷ $\mathscr{N} = \{1, \ldots, n\}$;
- ▷ $\mathscr{O} = \bigcup_{\mathbf{x} \in Var(\varphi)} \{o_{\mathbf{x}}, \overline{o_{\mathbf{x}}}\}$;
- ▷ pour tout $\mathbf{x} \in Var(\varphi)$, nous créons une contrainte d'exclusion $\neg(o_{\mathbf{x}} \wedge \overline{o_{\mathbf{x}}})$;
- ▷ pour tout i, $\Delta_i = \{(o_{\mathbf{x}}, 1)|\mathbf{x} \in C_i\} \cup \{(\overline{o_{\mathbf{x}}}, 1)|\neg\mathbf{x} \in C_i\}$;
- ▷ $\mathscr{V} = \mathbb{N}$, $\oplus = \max$ et $g = \min$;
- ▷ on cherche un partage dont l'utilité collective est supérieure ou égale à 1.

À toute interprétation v de φ correspond un partage admissible $\overrightarrow{\pi}$, car seul un des deux objets $o_{\mathbf{x}}$ et $\overline{o_{\mathbf{x}}}$ peut être attribué. Réciproquement, à tout partage admissible tel qu'au moins un des objets $o_{\mathbf{x}}$ ou $\overline{o_{\mathbf{x}}}$ est attribué pour tout $\mathbf{x}$ correspond une interprétation de φ

obtenue en instanciant à vrai tous les $\mathbf{x}$ tels que $o_{\mathbf{x}}$ est alloué, et à faux les autres variables. En ce qui concerne les autres partages admissibles $\overrightarrow{\pi}$, on peut toujours les compléter sans faire diminuer l'utilité collective, jusqu'à atteindre un partage tel qu'au moins un des objets $o_{\mathbf{x}}$ ou $\overline{o_{\mathbf{x}}}$ est attribué pour tout $\mathbf{x}$. On peut donc se restreindre à ce dernier type d'allocations.

S'il existe un partage admissible d'utilité supérieure ou égale à 1, alors l'interprétation correspondante satisfait chaque clause de la formule φ, puisque chaque agent i reçoit au moins un objet correspondant à un littéral de la clause i. Réciproquement, s'il existe un modèle de la formule φ, alors il est possible d'attribuer à chaque agent i l'ensemble des objets correspondant aux littéraux satisfaits de la clause : il y en a au moins un par clause, donc l'utilité de chaque agent est 1, ainsi donc que l'utilité collective.

Comme à l'accoutumée, cette réduction fonctionne aussi pour $g =$ leximin.

$\oplus = \max$ **et** $g = +$ **:** Il est relativement facile de vérifier qu'une réduction identique au cas précédent fonctionne, mais cette fois-ci depuis le problème [UNWEIGHTED-MAX-SAT] (problème 22). ▲

4.2.6 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette section à la complexité du problème de maximisation de l'utilité collective pour le problème de partage exprimé dans le langage de représentation compacte introduit au chapitre 3. Sans surprise, ce problème est NP-complet, mais ce qui est plus intéressant est qu'il le reste pour la plupart des cas particuliers même très simples pour les opérateurs d'agrégation courants et la limitation des contraintes aux contraintes les plus classiques. De plus, la variété des problèmes NP-complets utilisés pour les réductions dans les preuves montre que le choix des opérateurs et des contraintes conduit à des problèmes de nature relativement différente, même s'ils sont pour la plupart de même complexité. Nous avons toutefois exhibé quelques problèmes polynômiaux, pour des types de demandes très simples (atomiques), des contraintes de préemption uniquement, et certains types d'opérateurs.

Les résultats obtenus sont détaillés dans la figure 4.2. Dans cette figure, les résultats marqués (A) sont des corollaires de résultats déjà connus dans le domaine des enchères combinatoires, les résultats marqués en caractères non gras sont relativement immédiats, le cas marqué « ?» est encore non résolu, et enfin tous les autres résultats, marqués en gras, sont *a priori* non triviaux, et nouveaux à notre connaissance.

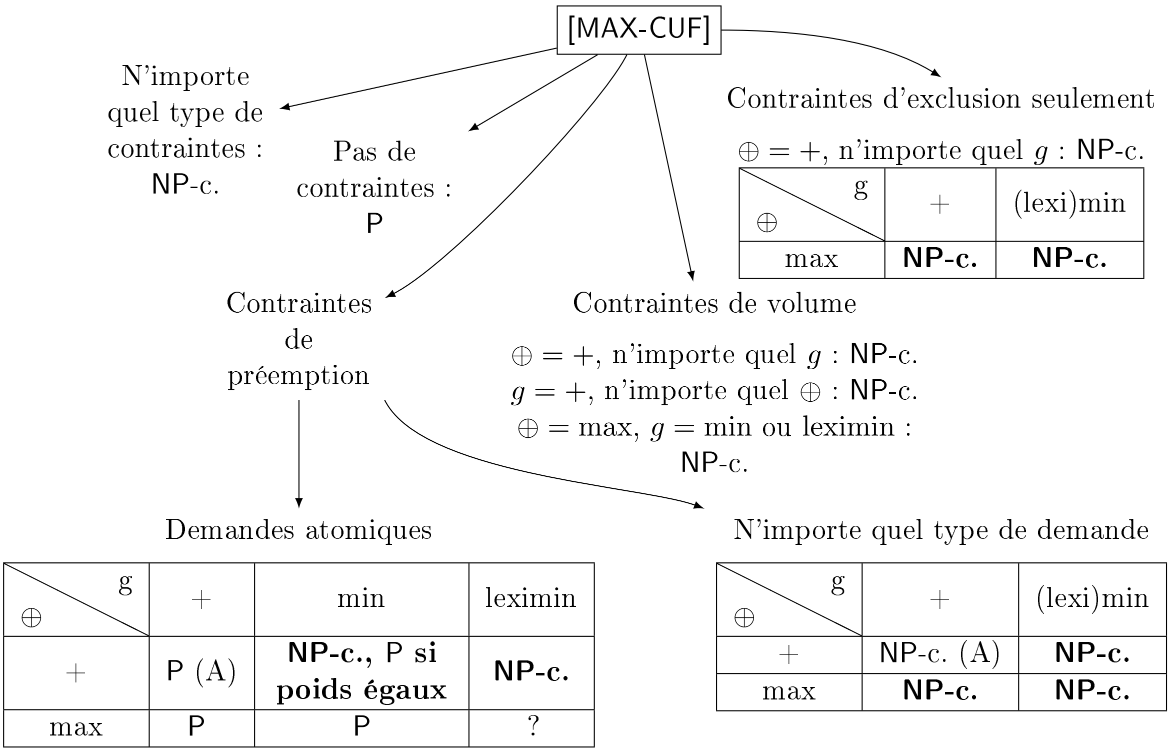


Figure 4.2 — Résumé des résultats de complexité obtenus pour le problème de maximisation de l'utilité collective.