

Introduction

La juste répartition des biens — et des travaux pour le bénéfice commun — entre les membres d'une société est la garantie du bien-être des individus, de la stabilité et de la paix sociale. Cette «juste répartition» des ressources implique l'introduction d'un ensemble de règles d'allocations et de lois acceptées par tous les membres de la collectivité, l'ensemble de ces règles correspondant à ce que les membres de la société considèrent comme *équitable*. Selon cette acception, le terme d'«équité» ne véhicule donc pas nécessairement de contenu éthique ou moral, contrairement à son emploi habituel dans le langage courant [Young, 1994]. Une règle (de partage) est considérée comme équitable si elle est acceptée et jugée appropriée par l'ensemble des membres de la collectivité, au vu des besoins, statuts et contributions de l'ensemble des individus.

Il convient de bien distinguer deux facettes de l'équité. D'un côté, l'équité au sens large concerne la répartition des biens, des droits et des obligations au sein d'une société dans son ensemble. Il s'agit du domaine de prédilection des philosophes sociaux et moraux, qui s'appliquent à définir la notion de *justice sociale*. L'autre aspect de l'équité est de nature beaucoup plus locale : elle s'applique à des situations concrètes telles que l'on peut rencontrer dans la vie de tous les jours et pour lesquelles on essaie de proposer un ensemble de règles permettant de résoudre les problèmes au cas par cas. C'est à cet aspect de l'équité que nous ferons référence dans ce travail de thèse ; nous donnerons quelques exemples de telles situations concrètes dans cette introduction.

Le problème de partage et les notions qui lui sont rattachées font en fait partie de la question beaucoup plus générale de la *prise de décision collective*. Cette question, concernant le choix, parmi un ensemble d'options possibles, d'une alternative impliquant un certain nombre d'individus, a donné naissance d'une part à la théorie du choix social, concentrée sur l'analyse et l'évaluation des méthodes dédiées à la prise de décision collective, et d'autre part à l'économie du bien-être, fondée sur la mesure de la performance et la comparaison de systèmes économiques réels ou imaginaires, ainsi que sur l'analyse et la critique de politiques économiques [Arrow *et al.*, 2002]. Si les premières réflexions sur ces sujets remontent à l'antiquité (Aristote (384–322 av. J.-C.) en Grèce et Kautilya (350–283 av. J.-C.) en Inde), les théories fondatrices de ces deux domaines sont attribuées à Marie-Jean de Condorcet (1743–1794) et Jean-Charles de Borda (1733–1799) pour la théorie du vote et du choix social, concentrée essentiellement sur les propriétés des systèmes électoraux et l'élection des comités, et à Jeremy Bentham (1748–1832) pour l'économie du bien-être, centrée sur la notion de fonction d'utilité collective. Plus récemment, les travaux fondamentaux de Kenneth J. Arrow (né en 1921) ont tenté une unification de ces deux domaines, centrée sur l'étude de l'existence *théorique* d'un processus d'agrégation raisonnable des préférences individuelles, fondé sur un ensemble d'axiomes.

Parallèlement au développement du choix social et de l'économie du bien-être, centrés sur l'interaction d'individus aboutissant à un choix collectif, s'est développée une autre discipline d'importance : la théorie de la décision individuelle. Cette discipline, située à l'interface entre l'économie, la gestion, la psychologie, la statistique et les mathématiques, est axée sur l'ensemble des processus qui permettent à un être humain de prendre une décision concernant un ensemble d'alternatives, dans un contexte pouvant être incertain ou mal connu. Ce domaine, fondé sur la notion de préfé-

rences individuelles, est lié au développement historique de la théorie des jeux (dont on attribue la fondation à John von Neumann (1903–1957) et Oskar Morgenstern (1902–1977)) et, dans une moindre mesure et de manière plus tardive, à celui de la recherche opérationnelle.

Si l'intelligence artificielle et la théorie de la décision individuelle sont historiquement liées, en revanche il n'en est pas de même pour la décision collective, qui est traditionnellement le domaine réservé des philosophes, des psychologues, des économistes théoriques ou des mathématiciens, et dont le rapprochement avec la communauté informatique est relativement récente. Cette rencontre est particulièrement intéressante. Alors que du côté de la communauté du choix social, la plupart des travaux sont concentrés sur l'axiomatisation de propriétés liées à la décision collective et sur la recherche de procédures permettant d'aboutir à une décision vérifiant un critère donné, peu de travaux se sont intéressés à la *difficulté* liée au calcul de la décision optimale, et encore moins à son *implantation*, ou en d'autres termes à sa traduction *algorithmique*. D'un autre côté, si ces notions sont à la base de la recherche en intelligence artificielle et en informatique, les travaux de ces derniers domaines sont la plupart du temps fondés sur l'optimisation d'un critère additif ou linéaire, et se préoccupent rarement de notions telles que l'équité, qui sont pourtant centrales dans le domaine du choix social. Outre les notions d'algorithmique et de complexité liées à la décision collective et individuelle, le rapprochement de ces communautés a fait émerger un champ de recherche complètement nouveau et prometteur, concernant les problèmes de décision sur des domaines finis et combinatoires. L'aspect combinatoire, pourtant crucial dans de nombreux problèmes de décision sur des domaines finis, a été jusqu'ici relativement négligé dans le domaine du choix social.

Le rapprochement récent du domaine de la décision au sens large avec l'informatique et intelligence artificielle a donc fait émerger de nouvelles problématiques communes. Ces problématiques sont regroupées sous le terme de *choix social computationnel*. Notons que ce rapprochement n'a rien de surprenant. D'un côté, le domaine de l'intelligence artificielle est par essence porté sur la compréhension, la modélisation et la formalisation des comportements humains¹, et quoi de plus humain que l'ensemble des processus aboutissant au choix d'une décision collective ; d'un autre côté, les nouveaux terrains d'investigation de la communauté du choix social ont fait émerger un certain nombre de problèmes — notamment liés à la représentation des préférences et à la prise en compte de domaines combinatoires — sur lesquels les chercheurs en informatique et intelligence artificielle peuvent apporter des outils et des réponses.

* * * * *

Le travail que nous allons présenter ici est issu de ce rapprochement entre communautés. Il sera plus précisément axé sur le problème de partage équitable. Si les fondements théoriques de l'étude des problèmes de partage s'appuient sur les bases solides du choix social et de l'économie du bien-être, le partage a des spécificités qui font de lui un domaine d'étude interdisciplinaire à part entière. Son omniprésence dans des applications concrètes, que ce soit dans le domaine industriel, institutionnel, ou domestique, explique l'abondance de littérature qui lui est consacrée, que ce soit — tout comme pour la décision collective — dans le domaine de la philosophie, dans le domaine de l'économie, ou plus récemment dans le domaine de l'informatique et de l'intelligence artificielle.

Derrière le terme de «partage» se dessine une notion aux contours flous, polymorphe, et pouvant englober tout un ensemble de problèmes, allant de l'allocation de tâches entre des machines ou des individus à la division d'un territoire entre plusieurs communautés, en passant par le partage d'objets

¹Au moins pour les partisans de la vision «forte» de l'intelligence artificielle.

entre des agents. Il convient donc dans un premier temps de proposer une définition générique du problème de partage, afin d'en poser les limites :

Définition 1 (Problème de partage) *Un problème de partage est un problème de décision ou d'optimisation particulier défini comme suit :*

- Des entrées**
- ▷ une ressource commune limitée,
 - ▷ un ensemble fini \mathcal{N} d'agents demandeurs de la ressource,
 - ▷ un ensemble de contraintes sur la ressource,
 - ▷ un critère d'optimisation ou de décision.
- Une sortie** *Une allocation d'une partie ou de la totalité de la ressource à chaque agent qui vérifie les contraintes sur la ressource et qui optimise ou vérifie le critère donné.*

Dans cette définition, la ressource joue un rôle central. Elle peut prendre des formes très variées : ensemble fini d'objets physiques, quantité divisible finie, ensemble de quantité finies et divisibles, travaux². . . Le point commun entre toutes les formes que peut prendre la ressource est qu'elle est toujours disponible en quantité *finie*. En outre, un certain nombre de facteurs extérieurs physiques ou légaux peuvent limiter l'ensemble des allocations possibles de la ressource : ce sont ces facteurs qui sont regroupés sous le terme de «contraintes». Les agents impliqués dans la définition du problème de partage sont «demandeurs» de la ressource dans le sens où ils expriment des préférences sur le partage de cette ressource. Le terme «agent» peut être pris au sens large : en particulier, il peut s'agir d'agents artificiels comme des machines auxquelles doivent être allouées un certain nombre de tâches. Il conviendra dans ce dernier cas d'être très prudent sur l'emploi de termes subjectifs tels que l'équité ou la justice morale afin de ne pas tomber dans le piège anthropomorphique : appliqués à des machines, ces concepts ne peuvent avoir une signification plus profonde que celles de modèles formels appliqués à des cas concrets. Enfin, le critère d'optimisation ou de décision fait bien entendu référence à ce que la collectivité juge comme étant un partage «adéquat» : autrement dit, ce critère concerne l'*équité* de la décision, mais aussi l'*efficacité*, ce dernier terme faisant référence au fait que la ressource ne doit pas être sous-exploitée.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, de délimiter les contours de ce travail de thèse, et de détailler l'organisation du manuscrit, nous allons introduire un certain nombre d'exemples concrets de problèmes de partage réels. L'objectif de l'introduction de ces exemples est double. Tout d'abord, nous cherchons à mettre en valeur l'omniprésence de ces problèmes dans le monde réel. En outre, ces applications, dont la première qui sera présentée est l'inspiratrice de ce travail de thèse, nous serviront à illustrer les différents chapitres de ce manuscrit, et seront, pour les applications 1, 4 et 5 à la base des expérimentations présentées dans le chapitre 6.

Application 1 (Partage de ressources satellitaires) En raison de leur coût prohibitif, les projets spatiaux de grande envergure sont souvent cofinancés, puis coexploités par plusieurs agents (pays, entreprises, agences civiles ou militaires . . .). C'est le cas en particulier des constellations de satellites d'observation de la Terre telles que la constellation Pléiades, projet orchestré par le *Centre National d'Études Spatiales*.

La mission de ce type de satellites consiste, comme l'illustre la figure 1, à acquérir des photographies de la Terre, en réponse à des demandes de prises de vues déposées par les agents auprès d'un centre de planification commun situé au sol. Ces demandes sont d'importances inégales pour les agents, ce qui s'exprime par l'association d'un poids numérique à chaque requête. En outre, les demandes peuvent concerner des prises de vue simples, ou des prises de vue complexes demandant plusieurs acquisitions successives, comme par exemple les prises de vue stéréographiques nécessitant

²Notons que le problème de partage de travaux ou de corvées ne se distingue pas fondamentalement du problème de partage de ressources : il suffit de considérer le travail comme une ressource «négative».

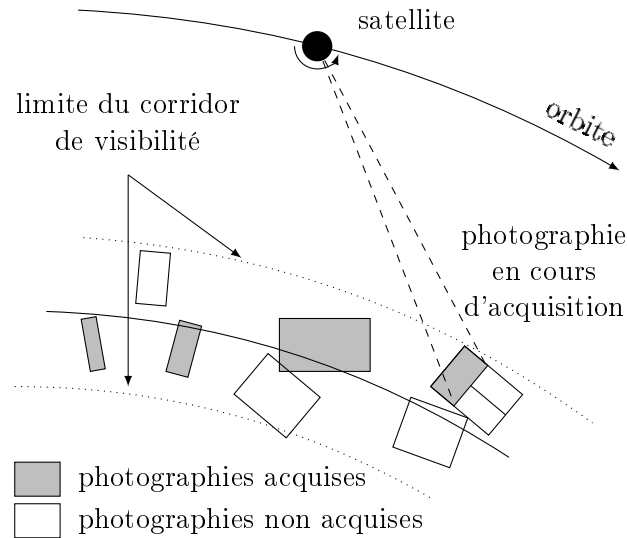


Figure 1 — Acquisition d'une photographie par un satellite d'observation de la Terre.

deux acquisitions, ou encore les prises de vues concernant des zones géographiques plus larges que la fauchée de l'instrument. Notons encore qu'une prise de vue peut être réalisée de plusieurs manières différentes, correspondant par exemple à plusieurs révolutions successives d'un satellite, ou encore à l'acquisition par deux satellites différents de la constellation.

Les demandes sont valables pour un jour donné, et la planification globale des prises de vue de tous les satellites de la constellation est organisée par intervalles de temps successifs. Le centre de planification détermine donc, parmi les demandes concernant un jour donné, l'ensemble des demandes qui seront satisfaites, c'est-à-dire l'ensemble des photographies qui seront acquises ce jour-là par la constellation. Cet ensemble de demandes satisfaites constitue une *allocation* journalière des demandes aux agents.

Les contraintes physiques d'exploitation et le nombre important de demandes concernant certaines zones engendrent des conflits entre demandes. Il est donc en général impossible de satisfaire simultanément toutes les demandes déposées pour un jour donné. Autrement dit, seul un sous-ensemble des demandes pourront être satisfaites. Toutes ces contraintes définissent l'ensemble des *allocations admissibles*. Voici quelques ordres de grandeur concernant le problème réel. Les agents sont entre 3 et 6. Plusieurs centaines de demandes sont candidates chaque jour, parmi lesquelles 100 à 200 seront satisfaites.

Tous les agents n'ont pas contribué de manière égale au financement de la constellation, ce qui se traduit donc par un «droit de retour sur investissement» différent pour chaque agent. Prenant en compte ces contraintes, l'exploitation de la constellation de satellites doit se faire de manière :

- ▷ *équitable*, dans la mesure où chaque agent attend un retour sur investissement en rapport avec sa contribution financière dans le projet ;
- ▷ *efficace*, dans le sens où la constellation ne doit pas être sous-exploitée.

On pourra trouver une description complète et détaillée du problème Pléiades dans [Lemaître *et al.*, 2002], et une description simplifiée du problème dans [Lemaître *et al.*, 1999; Fargier *et al.*, 2004a]. Les aspects algorithmiques dédiés à ce problème ont de plus été étudiés dans [Bianchessi *et al.*, 2007].

Application 2 (Partage de réseaux informatiques) Un domaine très concerné par la problématique du partage est celui des réseaux de télécommunication, et plus particulièrement celui des

réseaux informatiques. Ce domaine concerne en effet par essence l'allocation d'une ressource critique, la bande-passante, à un ensemble d'utilisateurs demandeurs de la ressource, par le biais d'applications logicielles utilisatrices du réseau. Dans ce type d'applications, la notion d'équité est à la fois fondamentale et mal définie, car on veut garantir une qualité de service équivalente à tous les utilisateurs, alors que dans le même temps, les applications utilisatrices du réseau sont très hétérogènes (applications élastiques comme les clients e-mail ou FTP, applications temps-réel comme la lecture de flux vidéo en ligne, etc.).

De nombreux travaux portent sur la notion d'équité dans le partage de réseaux informatiques. Cette notion peut intervenir à différents niveaux : dans des niveaux très proches de la couche matérielle (systèmes de queues équitables pour garantir le traitement égal de chaque datagramme), ou dans les couches logicielles (l'égalité du temps d'accès au réseau peut être critique dans certaines applications comme les enchères en ligne).

On pourra trouver dans [Denda *et al.*, 2000] une étude générale du problème de l'équité dans les réseaux informatiques. Le problème de l'optimisation automatique du routage dans les réseaux informatiques a été étudié dans [Frei *et al.*, 2005], qui aborde le problème du point de vue de la planification estimée du trafic, et non sur demande comme la plupart des approches.

Application 3 (Partage de l'espace aérien) L'augmentation démesurée du trafic aérien depuis une vingtaine d'années, et la poursuite prévue de son augmentation pour les prochaines décennies pose de manière de plus en plus critique des problèmes de congestion au niveau des aéroports et dans l'espace aérien. Actuellement, le facteur limitant principal de la capacité de l'espace aérien est donné par la charge de travail des contrôleurs, qui sont chargés de réguler l'écoulement du trafic dans des conditions optimales de sécurité.

La congestion du secteur aérien peut être diminuée de deux manières : soit par augmentation des infrastructures aéroportuaires, une meilleure division de l'espace aérien en secteurs, et une amélioration technologique des systèmes de surveillance et de navigation, ce qui revient à augmenter la ressource disponible en l'utilisant mieux, soit par une régulation de la demande par exemple par des procédures d'allocation de créneaux de décollage et d'atterrissage dans les aéroports.

Le problème de diminution de la congestion de l'espace aérien est un exemple typique de problème d'allocation de ressources, dans lequel l'équité joue un rôle crucial. Il est en effet nécessaire de répartir les problèmes liés à la répartition des créneaux (tels que les retards dans les vols) de manière équitable entre les compagnies aériennes. Ce problème, comme la plupart des problèmes de régulation de trafic, est traité par des mécanismes incitatifs tels que des systèmes de taxes variables.

On pourra se référer, pour plus de détails sur ce problème particulier de partage de l'espace aérien et des ressources aéroportuaires à la thèse [Deschinkel, 2001], ainsi qu'aux articles [Jonker *et al.*, 2005; Faltings, 2005].

Application 4 (Allocation de sujets à des étudiants) Dans de nombreuses institutions telles que des écoles ou des universités se posent le problème d'affectation de sujets, de travaux ou de modules d'enseignement à des étudiants. L'exemple concret que nous avons à disposition est celui de l'affectation de sujets de travaux expérimentaux (abrégé en «TREX») à des étudiants de SUPAÉRO : un ensemble de sujets doit être réparti entre des binômes d'étudiants ayant formulé des préférences sur ces sujets, sous la forme d'un ordre total. Chaque binôme doit être pourvu de deux sujets, et la répartition de ces sujets doit être équitable (en dehors de toute considération de mérite ou de niveau scolaire). Le problème particulier est décrit dans la section 6.4 du chapitre 6.

Ce problème est particulièrement intéressant, car on le retrouve sous des formes diverses dans de nombreuses situations du monde réel, impliquant une allocation d'objets à des agents dans laquelle chaque agent doit avoir un nombre fixe d'objets (ce sont des problèmes du type «couplage

agents-objets»). Ces problèmes sont typiques du domaine de l'affectation de tâches ou des problèmes d'emplois du temps équitables.

Application 5 (Enchères combinatoires) L'avènement de l'ère Internet a entraîné le développement d'un nombre important de systèmes de négociation en ligne et de commerce électronique. Ces systèmes sont en général fondés sur des implantations logicielles de divers mécanismes d'enchères. Le fonctionnement de ces mécanismes repose sur deux phases distinctes : lors de la phase de *mise*, une autorité centrale (le commissaire-priseur) recueille l'ensemble des mises des agents enchérisseurs, et lors de la phase de *détermination du gagnant* (*winner determination*), le commissaire-priseur calcule l'allocation optimale des objets aux agents, correspondant à la maximisation de son revenu. Parmi ces mécanismes d'enchères, ceux pour lesquels les agents peuvent miser sur des lots d'objets (et non sur des objets simples) sont d'un intérêt particulier, car le *Winner Determination Problem* y est très complexe. Ce type d'enchères sont appelées les *enchères combinatoires*.

Le domaine des enchères combinatoires est le sujet d'un nombre croissant de publications dans le domaine de l'intelligence artificielle [Cramton *et al.*, 2006; Sandholm, 1999, 2002; Rothkopf *et al.*, 1998; Lehmann *et al.*, 1999]. Cet engouement est dû d'une part au fait que le *Winner Determination Problem* est un problème concret ayant de nombreuses applications, et d'autre part à sa complexité algorithmique (malgré sa relative simplicité apparente), et la complexité liée à l'expression des mises par les agents.

Notons que la notion d'équité n'est pas au centre de ce problème, puisque l'on ne cherche pas à contenter les agents sur des règles communes acceptées par tous, mais à maximiser le revenu du commissaire-priseur. Toutefois l'équité n'est pas complètement absente du problème, et peut se présenter sous des formes diverses : équité de la procédure d'expression des mises, traitement égal des agents garanti par l'anonymat des lots, etc.

* * * * *

Comme nous l'avons fait remarquer, le rapprochement de la communauté de la décision avec celle de l'informatique et de l'intelligence artificielle a fait émerger un certain nombre de problèmes nouveaux, en particulier dans le domaine du partage équitable, nécessitant une approche pluridisciplinaire : représentation compacte et élicitation des préférences sur des domaines combinatoires, complexité, implantation des modèles et algorithmique liée aux problèmes de partage. L'objectif de cette thèse est d'étudier ces problématiques, dans le cadre particulier du partage de biens indivisibles.

Ce travail est centré sur trois aspects principaux :

- ▷ la *modélisation* et l'introduction d'un cadre formel permettant d'englober les différents aspects du problème de partage ;
- ▷ l'étude de la représentation compacte du problème de partage sous différentes formes et l'analyse de la *complexité* théorique liée à cette représentation compacte ;
- ▷ l'étude *algorithmique* du problème de partage équitable de biens indivisibles, sous le point de vue d'un critère particulier, l'ordre de bien-être social égalitariste leximin.

Le manuscrit est divisé en trois parties, dédiées respectivement à la modélisation, à la représentation compacte et à la complexité, et enfin à l'algorithmique. L'objectif de la première partie est de poser les bases de la modélisation du problème de partage. Ces bases sont introduites dans le premier chapitre, construit de manière à mettre en avant l'aspect polymorphe et multifacette du

problème de partage. Ce chapitre est fondé sur l'ensemble de la littérature concernant la théorie de la décision et la théorie du choix social et du *welfarisme* cardinal. Le second chapitre de cette première partie a un statut un peu à part dans l'ensemble de la thèse, puisqu'il est centré sur le problème particulier de l'introduction de droits exogènes dans le modèle du *welfarisme* cardinal introduit au premier chapitre, et constitue la première contribution de ce travail de thèse. La deuxième partie est centrée sur l'aspect combinatoire des problèmes de partage. Elle se divise donc logiquement en deux chapitres, traitant respectivement de la problématique de la représentation compacte, indissociable de la notion de problème de décision ou d'optimisation sur un espace combinatoire, et de la complexité, liée bien entendu à la représentation compacte introduite. Le chapitre sur la complexité, lié à l'introduction de deux langages de représentation compacte du partage, constitue la deuxième contribution de ce travail de thèse. Enfin, la troisième et dernière partie, qui constitue la troisième contribution de la thèse, est centrée sur l'étude d'un problème algorithmique particulier lié au partage équitable : celui du calcul de solutions leximin-optimales. Nous introduisons dans le chapitre 5 un ensemble d'algorithmes dédiés à ce problème. La comparaison expérimentale de ces algorithmes sur des problèmes réalistes est détaillée dans le chapitre 6.

On pourra éventuellement avoir une lecture non linéaire du manuscrit, cependant la bonne compréhension de certains chapitres nécessite un certain nombre de notions et de notations introduites dans les chapitres précédents. Nous avons présenté sur la figure 2 les relations de dépendance entre les chapitres du manuscrit, à considérer comme un guide de lecture. Dans cette figure, les arcs en traits épais figurent une dépendance forte entre les chapitres (la compréhension du second est sérieusement compromise sans la lecture du premier) ; les arcs en traits fins figurent une dépendance faible entre les chapitres (la compréhension du second dépend de la connaissance de quelques notions de base introduites dans le premier) ; enfin, les arcs en pointillés figurent des références ponctuelles entre les chapitres.

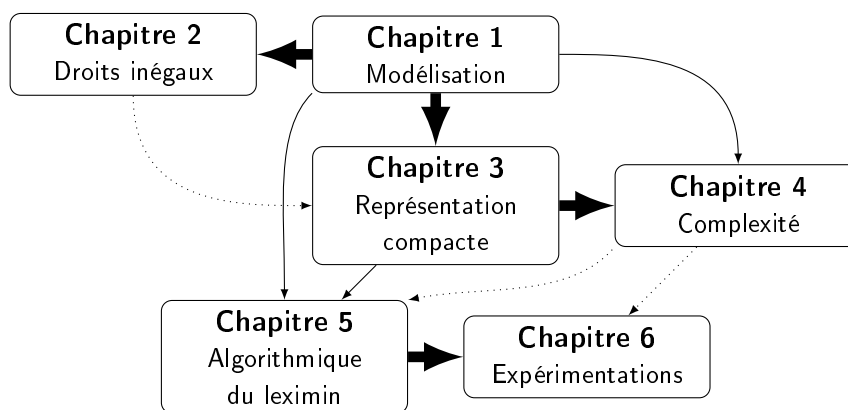


Figure 2 — Graphe de dépendances entre chapitres.