Partage de ressource : expression des préférences, classification et applications concrètes.

Sylvain Bouveret

ONERA-DCSD / CNES / IRIT

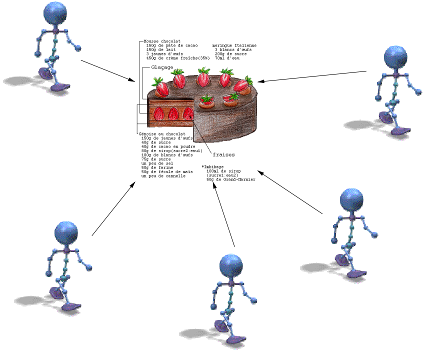
29 mars 2005

Qu'est-ce qu'un problème de partage ?

Intuitivement : Une ressource limitée à diviser entre plusieurs agents.

Qu'est-ce qu'un problème de partage ?

Intuitivement : Une ressource limitée à diviser entre plusieurs agents.



Une définition générique du problème de partage ?

Un problème de partage $\mathcal{P}$ est un problème d'optimisation ou de décision.

Entrées :

- n agents.
- Une ressource commune limitée.
- Un langage commun d'expression des préférences et les préférences des n agents sur la ressource.
- Des contraintes sur la ressource.
- Un critère d'optimisation ou de décision.

Sortie :

Une allocation d'une partie de la ressource à chaque agent (parts) qui vérifie les contraintes et qui optimise ou vérifie le critère.

Introduction

- Comment tenir compte des préférences des agents pour diviser la ressource, et comment les agents peuvent-ils exprimer leurs préférences ?
- Le problème de partage est-il répandu dans le monde réel, et sous quelles formes ?
- Comment classer les différents types de problèmes de partage ?

Partage de ressource : expression des préférences, classification et applications concrètes.

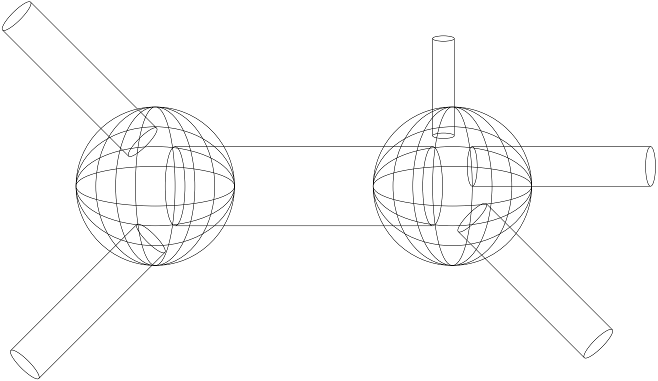
1. Quelques applications concrètes du problème de partage
   - Dans le domaine informatique
   - Le secteur aérien
   - Dans le domaine spatial
   - D'autres domaines...
2. Comment classer les problèmes de partage ?
   - Nature des ressources
   - Préférences des agents
   - Entre négociations et arbitrage
   - Qu'est-ce qu'un bon partage ?
   - Un mot sur la normalisation des préférences cardinales
3. De l'expression des préférences à l'utilité collective
   - De l'utilité d'un langage de représentation compact et expressif
   - Des langages à base de logique

Partage dans les réseaux informatiques (1)

Dans les réseaux informatiques, la ressource à partager est la bande passante.

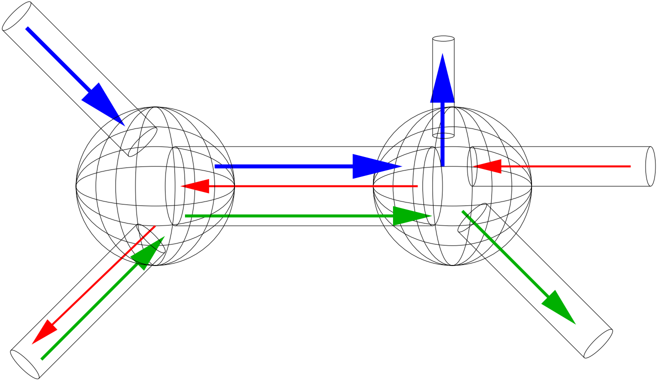
Partage dans les réseaux informatiques (1)

Dans les réseaux informatiques, la ressource à partager est la bande passante.



Partage dans les réseaux informatiques (1)

Dans les réseaux informatiques, la ressource à partager est la bande passante.



L'équité dans les réseaux informatiques ?

L'équité apparaît à des niveaux très divers, et peut prendre de nombreuses formes,

- suivant les demandes des applications (élastiques, temps-réel, ...),
- suivant la couche OSI considérée,
- suivant l'utilité considérée (retard, débit, perte, bande-passante...).

Les mécanismes actuellement mis en place sont par exemple :

- des mécanismes de files d'attente équitables,
- le protocole TCP (prévention de la congestion),
- des mécanismes au niveau application (enchères électroniques par exemple).

Partage de l'espace aérien

(thèse de K. Deschinkel - 2001) les compagnies aériennes doivent se partager les créneaux d'utilisation des aéroports et les différents secteurs aériens.

- Ressource à partager : créneaux d'utilisation des aéroports et secteurs aériens.
- Agents : les différentes compagnies impliquées.
- Contraintes : normes de sécurité en vigueur / temps de parcours / routes empruntées par les avions.

Partage de l'espace aérien

- Problème actuel : celui de la congestion.
- Solution actuelle : premier arrivé, premier servi peu efficace, et engendrant des retards inacceptables.
- Solutions envisagées :
  - procédures d'optimisation avec un critère de coûts globaux (solution utilitariste),
  - échanges d'information entre les compagnies et le contrôle aérien, conduisant naturellement à des solutions plus équitables,
  - système de tarification modulable.

La Station Spatiale Internationale

(modèle de 1996) 6 personnes se trouvent en permanence dans la station. Ces permanents se relaient pendant 10 ans, au rythme des vols de navettes (créneaux de temps discrets).

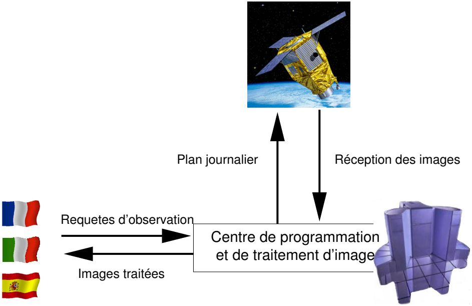
- Ressource à partager : occupation de l'ISS.
- Agents concernés : différentes nations représentées par leurs agences spatiales : NASA / CSA / ESA / NASDA.
- Coûts connus précisément (quotas), mais pas les bénéfices (utilités) – exprimés toutefois comme une fonction directe du temps d'occupation de la station.
- Pondérations tenant compte des contributions effectives de chaque partie

La constellation Pléiades (1)

- Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (France-Italie-Espagne).
- Chaque agent (agences civiles et militaires de chaque pays) envoie des demandes d'images à prendre, simples ou complexes (stéréo, tri-stéréo...).
- À chaque demande est associée un poids qui reflète son importance.
- Chaque jour, le Centre de Programmation sélectionne les demandes qui seront satisfaites le lendemain et ordonne l'ensemble des prises de vue sélectionnées.
- L'exploitation doit être :
  - efficace $\rightsquigarrow$ la constellation ne doit pas être sous-exploitée,
  - équitable $\rightsquigarrow$ chaque agent attend un « retour sur investissement »en rapport avec sa contribution financière.

La constellation Pléiades (1)

- Une constellation de satellites d'observation de la Terre co-financée par plusieurs pays (France-Italie-Espagne).



La constellation Pléiades (2)

- Les agents : agences militaires et civiles de chaque pays.
- La ressource : l'exploitation du satellite (demandes d'images).
- L'expression des préférences : demandes pondérées et / ou niveaux de priorités.
- Contraintes : contraintes physiques (fenêtres temporelles, temps de transition, images particulières – stéréo, ... –, mémoire, énergie,...)
- Critère de qualité du partage : efficacité et équité.

Partage et éthique pour l'administration de soins

Dans le cas de répartition de soins à des malades, les critères d'utilité considérés doivent être issus de considérations éthiques. Les critères sont divers (et subjectifs) :

- quantité de soins nécessaires pour un patient,
- chances de survie du patient.
- « utilité »du patient pour la société (médecins, pompiers...),
  Alors qu'en temps normal, les critères appliqués sont plutôt égalitaristes, dans certains cas exceptionnels, on adopte un comportement utilitariste (catastrophes naturelles, attentats, guerres...) en soignant d'abord les personnes utiles telles que les médecins ou les pompiers.

CORMAS

- CORMAS, une application du centre de Coopération Internationale en Recherche Agronomique pour le Développement (CIRAD).
- Une plateforme de simulation multi-agents dédiée à la gestion de ressources naturelles renouvelables.
- Applications :
  - Gestion de l'eau $\rightsquigarrow$ irrigation, accès aux nappes souterraines, bassins versants, allocation de licenses d'eau...
  - Gestion de ressources cynégétiques.
  - Gestion du bois $\rightsquigarrow$ bois de chauffage, plantations...
  - Gestion de pâturages...
- Plus d'info sur `http://cormas.cirad.fr`

Partage de ressource : expression des préférences, classification et applications concrètes.

1. Quelques applications concrètes du problème de partage
   - Dans le domaine informatique
   - Le secteur aérien
   - Dans le domaine spatial
   - D'autres domaines...
2. Comment classer les problèmes de partage ?
   - Nature des ressources
   - Préférences des agents
   - Entre négociations et arbitrage
   - Qu'est-ce qu'un bon partage ?
   - Un mot sur la normalisation des préférences cardinales
3. De l'expression des préférences à l'utilité collective
   - De l'utilité d'un langage de représentation compact et expressif
   - Des langages à base de logique

Quels paramètres ?

- La nature des ressources :
  - Sont-elles continues / discrètes / mixtes ?
  - Les compensations monétaires sont-elles possibles ?
  - Existe-t-il des contraintes sur les ressources ?
- Les préférences des agents (voir plus loin).
- La procédure de partage : centralisée ou décentralisée.
- La définition de la « qualité »d'un partage.

Nature des ressources

Divisibilité des ressources :

- Ressources divisibles. $\rightsquigarrow$ *Découpage de gâteau, partage d'une somme d'argent, choix de l'emplacement d'un bien commun, partage de territoire...*
- Ressources indivisibles $\rightsquigarrow$ *Partage d'un ensemble d'objets entre plusieurs personnes, enchères, Pléiades...*
- Ressources mixtes $\rightsquigarrow$ *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*
- Compensations monétaires $\rightsquigarrow$ *Partage de biens lors d'un héritage ou d'un divorce...*

Contraintes possibles

En général, un certain nombre de contraintes restreignent l'ensemble des partages possibles :

- contraintes de préemption entre objets $\rightsquigarrow$ un objet ne peut être attribué qu'à une seule personne,
- contraintes d'exclusion $\rightsquigarrow$ deux objets donnés ne peuvent être simultanément attribués,
- contraintes de volume $\rightsquigarrow$ on ne peut attribuer plus d'un certain nombre, ou « volume »d'objets,
- contraintes de dépendances entre objets,
- contraintes de faisabilité physique,
- ...

Expression des préférences des agents

- Préférences ordinales $\leadsto$ préordre sur l'ensemble des partages possibles.
- Préférences cardinales $\leadsto$ fonction d'utilité représentant la satisfaction d'un agent vis-à-vis d'un partage.

L'expression des préférences fera l'objet de la section suivante.

Procédure d'allocation

- Procédure centralisée $\rightsquigarrow$ le partage est choisi par un arbitre selon ses propres critères. Avantages :
  - les protocoles de communication sont simples (les agents se contentent d'exprimer leurs préférences),
  - approche très étudiée dans le domaine micro-économique,
  - s'adapte bien à des considérations algorithmiques.
- Procédure décentralisée $\rightsquigarrow$ le partage est négocié entre les agents à partir d'une allocation initiale qui évolue par des négociations locales successives. Avantages :
  - la complexité peut être distribuée,
  - approche très étudiée aussi dans le domaine micro-économique,
  - peut-on réellement faire confiance à un arbitre ?
  - liberté des agents,
  - semble plus naturel dans certains types de problèmes.

Comment définir un « bon »partage ?

Intuitivement, un partage doit être :

- Efficace. $\rightsquigarrow$ Voudrait-on d'un partage qui ne donne rien à personne ?
- Souvent équitable, mais pas toujours. $\rightsquigarrow$ L'équité n'a pas vraiment de sens dans certains contextes : enchères combinatoires, ou plus généralement les problèmes où les agents sont vus comme des « producteurs »d'utilité pour l'arbitre.

Sur la notion d'efficacité

- Pareto-efficacité.
- Critère cardinal utilitariste (efficacité en terme de production d'utilité).

Sur la notion d'efficacité

- Pareto-efficacité.
- Critère cardinal utilitariste (efficacité en terme de production d'utilité).

Definition (Pareto-efficacité)

Un partage est Pareto-efficace ssi on ne peut augmenter strictement la satisfaction d'un agent qu'en diminuant strictement la satisfaction d'au moins un autre agent.

Exemple : 2 agents, 2 objets à partager / L'agent 1 désire o_1 avec une utilité de 10 et o_2 avec une utilité de 5. / L'agent 2 désire o_2 avec une utilité de 2.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ o_1 / Agent 2$\leftarrow$ o_2 est Pareto-efficace.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ o_2 / Agent 2$\leftarrow$ o_1 ne l'est pas.

Sur la notion d'efficacité

- Pareto-efficacité.
- Critère cardinal utilitariste (efficacité en terme de production d'utilité).

Definition (Critère utilitariste)

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(\pi) > \sum_{i=1}^{n} u_i(\pi')$$

Exemple : 2 agents, 2 objets à partager / L'agent 1 désire o_1 avec une utilité de 10 et o_2 avec une utilité de 9. / L'agent 2 désire o_1 avec une utilité de 9 et o_2 avec une utilité de 8.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ $\{o_1, o_2\}$ / Agent 2$\leftarrow$ $\emptyset$ maximise le critère utilitariste.

Sur la notion d'équité

- Absence d'envie.
  - Minimisation du nombre d'agents envieux.
  - Minimisation de l'envie moyenne.
- Critère cardinal égalitariste.
- Indices d'inégalité (indice de Gini,...)

Sur la notion d'équité

- Absence d'envie.
  - Minimisation du nombre d'agents envieux.
  - Minimisation de l'envie moyenne.
- Critère cardinal égalitariste.
- Indices d'inégalité (indice de Gini,...)

Definition (Absence d'envie)

Un partage est sans-envie ssi chaque agent est autant ou plus satisfait avec sa propre part qu'il ne le serait avec la part d'un autre.

Exemple : 2 agents, 2 objets / L'agent 1 préfère o_1 à o_2. / L'agent 2 préfère o_2 à o_1.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ o_1 / Agent 2$\leftarrow$ o_2 est sans-envie.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ o_2 / Agent 2$\leftarrow$ o_1 ne l'est pas.

Sur la notion d'équité

- Absence d'envie.
  - Minimisation du nombre d'agents envieux.
  - Minimisation de l'envie moyenne.
- Critère cardinal égalitariste.
- Indices d'inégalité (indice de Gini,...)

Definition (Critère égalitariste)

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \min_{i=1,\ldots,n} u_i(\pi) > \min_{i=1,\ldots,n} u_i(\pi')$$

Remarque : on choisit en général un raffinement qui remplace le min par le leximin.

Sur la notion d'équité

- Absence d'envie.
  - Minimisation du nombre d'agents envieux.
  - Minimisation de l'envie moyenne.
- Critère cardinal égalitariste.
- Indices d'inégalité (indice de Gini,...)

Definition (Critère égalitariste)

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \min_{i=1,\ldots,n} u_i(\pi) > \min_{i=1,\ldots,n} u_i(\pi')$$

Exemple : 2 agents, 2 objets à partager / L'agent 1 désire o_1 avec une utilité de 3 et o_2 avec une utilité de 10. / L'agent 2 désire o_1 avec une utilité de 2 et o_2 avec une utilité de 3.
L'allocation Agent 1$\leftarrow$ $\{o_1\}$ / Agent 2$\leftarrow$ $\{o_2\}$ maximise le critère égalitariste.

Sur la notion d'équité

- Absence d'envie.
  - Minimisation du nombre d'agents envieux.
  - Minimisation de l'envie moyenne.
- Critère cardinal égalitariste.
- Indices d'inégalité (indice de Gini,...)

Équité et compensations temporelles

Lorsque plusieurs procédures de partage se suivent, on peut envisager de choisir des partages inéquitables si les inégalités sont compensées d'un partage à l'autre.

Équité et compensations temporelles

Lorsque plusieurs procédures de partage se suivent, on peut envisager de choisir des partages inéquitables si les inégalités sont compensées d'un partage à l'autre.

Entre l'utilitarisme et l'égalitarisme

- Moyennes pondérées ordonnées (OWA).
- Somme des exposants.
- Optimalité de Lorenz.

Entre l'utilitarisme et l'égalitarisme

- Moyennes pondérées ordonnées (OWA).
- Somme des exposants.
- Optimalité de Lorenz.

Definition (Ordered Weighted Average)

Si $\overrightarrow{u^\star}$ est le vecteur des utilités individuelles ordonnées par ordre croissant, et $\overrightarrow{w}$ est un vecteur de poids,

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i u_i^\star(\pi) > \sum_{i=1}^{n} w_i u_i^\star(\pi').$$

Si $\overrightarrow{w} = \langle 1, \ldots, 1 \rangle$, le critère est utilitariste.
Si $\overrightarrow{w} = \langle 1, 0, \ldots, 0 \rangle$, le critère est égalitariste (min).

Entre l'utilitarisme et l'égalitarisme

- Moyennes pondérées ordonnées (OWA).
- Somme des exposants.
- Optimalité de Lorenz.

Definition (Famille somme des exposants [Moulin 2004])

$$\pi \succ_\alpha \pi' \Leftrightarrow \mathrm{sgn}(\alpha) \sum_{i=1}^{n} (u_i(\pi))^\alpha > \mathrm{sgn}(\alpha) \sum_{i=1}^{n} (u_i(\pi'))^\alpha, \text{ pour}$$

$\alpha \in]-\infty, 1] \setminus 0$. Pour $\alpha = 0$, on prolonge par « continuité »avec $\sum_{i=1}^{n} \log(u_i)$.

Si $\alpha = 1$, le critère est utilitariste.
Si $\alpha = 0$, le critère est celui de Nash.
Pour $\alpha \to -\infty$, le critère tend vers l'égalitarisme leximin.

Entre l'utilitarisme et l'égalitarisme

- Moyennes pondérées ordonnées (OWA).
- Somme des exposants.
- Optimalité de Lorenz.

Definition (Optimalité de Lorenz [Moulin 1998])

$$\pi \succ \pi' \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \sum_{i=1}^{k} u_i^\star(\pi) \geq \sum_{i=1}^{k} u_i^\star(\pi') \\ \text{et } \exists k \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{k} u_i^\star(\pi) > \sum_{i=1}^{k} u_i^\star(\pi') \end{cases}.$$

Intercomparabilité et normalisation des utilités

Les critères numériques n'ont réellement de sens que pour des utilités comparables :

- Pour un critère utilitariste, les agents pourraient déclarer des utilités démesurées pour obtenir leurs demandes.
- Pour un critère égalitariste, les agents pourraient déclarer des utilités minuscules pour obtenir leurs demandes.

Plusieurs solutions possibles pour rendre les utilités comparables :

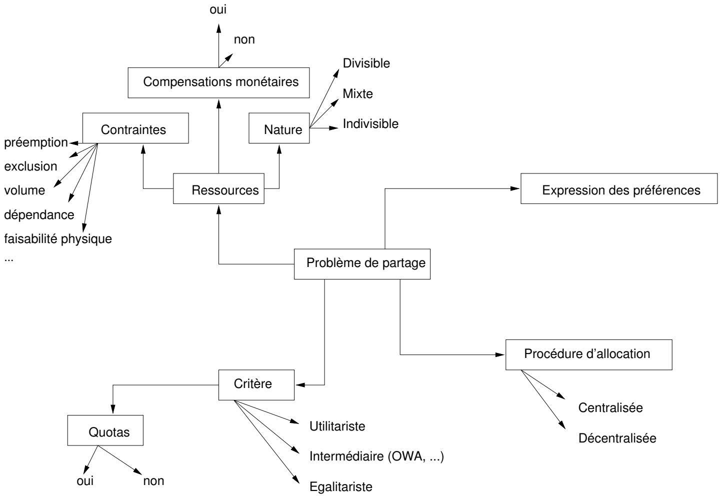
- allouer un nombre de points à chacun à répartir sur ses propres demandes,
- normaliser les utilités individuelles de chacun : $\overline{u_i} = u_i / u_i^{\max}$, avec $u_i^{\max}$ une utilité maximale (par exemple utilité maximale si seule de l'agent).

Prise en compte de droits ou quotas inégaux

Les agents ont-ils les mêmes droits sur la ressource ?

- Participation pécunière inégale dans un projet (ex : Pléiades).
- Production d'utilité différente selon les agents.

En résumé...


oui
non
Compensations monétaires
Divisible
Mixte
Indivisible
Contraintes
Nature
préemption
exclusion
volume
dépendance
faisabilité physique
...
Ressources
Expression des préférences
Problème de partage
Procédure d'allocation
Critère
Quotas
Centralisée
Décentralisée
Utilitariste
Intermédiaire (OWA, ...)
Egalitariste
oui
non

Partage de ressource : expression des préférences, classification et applications concrètes.

1. Quelques applications concrètes du problème de partage
   - Dans le domaine informatique
   - Le secteur aérien
   - Dans le domaine spatial
   - D'autres domaines...
2. Comment classer les problèmes de partage ?
   - Nature des ressources
   - Préférences des agents
   - Entre négociations et arbitrage
   - Qu'est-ce qu'un bon partage ?
   - Un mot sur la normalisation des préférences cardinales
3. De l'expression des préférences à l'utilité collective
   - De l'utilité d'un langage de représentation compact et expressif
   - Des langages à base de logique

Les préférences

Dans un problème de partage, chaque agent doit exprimer ses préférences sur l'ensemble des partages possibles.

Hypothèse : Chaque agent n'exprime ses préférences que sur les allocations qu'il reçoit (en particulier, il ne tient pas compte de ce qu'obtiennent les autres agents dans le partage).

$\mathcal{S}_i = \{\pi_i$ allocation pour l'agent $i\}$.

Comment exprimer une préférence ?

Dans le domaine de la théorie de la décision, une préférence est une satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- préférences dichotomiques,
- préférences ordinales,
- préférences cardinales.

Comment exprimer une préférence ?

Dans le domaine de la théorie de la décision, une préférence est une satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- préférences dichotomiques,
- préférences ordinales,
- préférences cardinales.

- un ensemble de « bonnes »parts,

Comment exprimer une préférence ?

Dans le domaine de la théorie de la décision, une préférence est une satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- préférences dichotomiques,
- préférences ordinales,
- préférences cardinales.

- un ensemble de « bonnes »parts,
- un préordre sur l'ensemble des parts,

Comment exprimer une préférence ?

Dans le domaine de la théorie de la décision, une préférence est une satisfaction absolue ou relative d'un individu face à diverses situations.

- préférences dichotomiques,
- préférences ordinales,
- préférences cardinales.

- un ensemble de « bonnes »parts,
- un préordre sur l'ensemble des parts,
- une fonction d'utilité.

Exemples

Un problème de partage à 3 objets o_1, o_2 et o_3. Ensemble des allocations pour un agent :
$2^{\mathcal{X}} = \{\emptyset, \{o_1\}, \{o_2\}, \{o_3\}, \{o_1, o_2\}, \{o_1, o_2\}, \{o_2, o_3\}, \{o_1, o_2, o_3\}\}$.

Exemples

Un problème de partage à 3 objets o_1, o_2 et o_3. Ensemble des allocations pour un agent :
$2^{\mathcal{X}} = \{\emptyset, \{o_1\}, \{o_2\}, \{o_3\}, \{o_1, o_2\}, \{o_1, o_2\}, \{o_2, o_3\}, \{o_1, o_2, o_3\}\}$.
Préférences dichotomiques :

$\boxed{\text{Ensemble des bonnes parts}} \leadsto \{o_1, o_2\}, \{o_3\}, \{o_2\}$

$>$

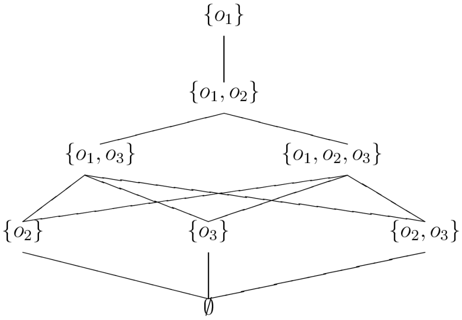
$\boxed{\text{Ensemble des mauvaises parts}} \leadsto \emptyset, \{o_1\}, \{o_1, o_3\}, \{o_2, o_3\}, \{o_1, o_2, o_3\}$

Exemples

Un problème de partage à 3 objets o_1, o_2 et o_3. Ensemble des allocations pour un agent :

$2^{\mathcal{X}} = \{\emptyset, \{o_1\}, \{o_2\}, \{o_3\}, \{o_1, o_2\}, \{o_1, o_2\}, \{o_2, o_3\}, \{o_1, o_2, o_3\}\}.$

Préférences ordinales :



Exemples

Un problème de partage à 3 objets o_1, o_2 et o_3. Ensemble des allocations pour un agent :
$2^{\mathcal{X}} = \{\emptyset, \{o_1\}, \{o_2\}, \{o_3\}, \{o_1, o_2\}, \{o_1, o_2\}, \{o_2, o_3\}, \{o_1, o_2, o_3\}\}$.
Préférences cardinales :

Allocation	Utilité
$\{o_1\}$	50
$\{o_1, o_2\}$	10
$\{o_1, o_3\}$	8
$\{o_1, o_2, o_3\}$	8
$\{o_2\}$	0
$\{o_3\}$	0
$\{o_2, o_3\}$	0
$\emptyset$	0

Explosion combinatoire

Expression de préférences sur des billets d'avion :
option = *(destination, prix, dates, nombre d'escales)* variables interdépendantes préférentiellement.
50 destinations, 10 tarifs, 10 dates de départ et 10 dates de retour, 0/1/2 escales ⇒ 150000 alternatives

Explosion combinatoire

Expression de préférences sur des billets d'avion :
option = *(destination, prix, dates, nombre d'escales)* variables interdépendantes préférentiellement.
50 destinations, 10 tarifs, 10 dates de départ et 10 dates de retour, 0/1/2 escales ⇒ 150000 alternatives

$\leadsto$ Nécessité d'un langage compact.

Représentation et élicitation des préférences

$$
\begin{array}{c}
\text{Agents} \\
| \\
\text{élicitation} \\
\text{interactive} \\
| \\
\boxed{\text{Forme concise}} \quad \rightsquigarrow \text{Langage de représentation} \\
| \\
\boxed{\text{Relation de préférence ou fonction d'utilité sur } \mathcal{S}} \\
\downarrow \\
\text{Allocations préférées.}
\end{array}
$$

Puissance d'expression et concision

- Puissance d'expression $\leadsto$ un langage R_1 peut-il exprimer les mêmes préordres qu'un autre langage R_2 ? (NB : La translation peut être exponentielle.) Si oui, R_1 est au moins aussi expressif que R_2.
- Concision $\leadsto$ existe-t-il une traduction de taille polynomiale de R_1 à R_2 ? Si oui, R_2 est au moins aussi concis que R_1.

Pourquoi la logique ?

- Langage « compact »et structuré.
- Puissance expressive.
- Relativement intuitif.
- Algorithmes existants efficaces.

Un langage d'expression basique

- Une formule K représentant l'ensemble des parts possibles.
- Un ensemble $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de « bonnes »parts.

Raffinements du langage à base de buts

On peut raffiner le langage précédent de manière à exprimer des préordres moins basiques.

- Langage propositionnel + cardinalités
  $\rightsquigarrow u_B(\pi_k) = Card(\{i | \pi_k \vDash \varphi_i\})$.
- Langage propositionnel + inclusion
  $\rightsquigarrow \pi_k \succeq \pi'_k \Leftrightarrow \{i | \pi_k \vDash \varphi_i\} \supseteq \{i | \pi'_k \vDash \varphi_i\}$.

Un langage à base de logique et de poids

On peut associer à chaque formule un poids.

$$B = \{\langle \varphi_1, w_1 \rangle, \dots, \langle \varphi_n, w_n \rangle\} \rightsquigarrow w_i \in \mathbb{R} \begin{cases} w_i > 0 & \text{récompense} \\ w_i < 0 & \text{pénalité} \end{cases}$$

Par défaut, on n'exprime pas les buts indifférents ($w_i = 0$).
La satisfaction d'un agent s'exprime alors en agrégeant les poids :

$$u_B(\pi_k) = F(\{w_i | \pi_k \models \varphi_i\})$$

- $F = \sum \rightsquigarrow$ poids additifs.
- $F = max$ ou $F = leximax$ $\rightsquigarrow$ seuls les meilleurs buts sont pris en compte.
- $F(G\{w_i | \pi_k \models \varphi_i \wedge w_i > 0\}, H\{w_i | \pi_k \models \varphi_i \wedge w_i < 0\})$ $\rightsquigarrow$ bipolarité.

Un exemple...

Achat de biens commestibles pour l'élaboration d'un repas : $\{pat, ab, pe\}$.

Préférences de l'agent 1 :
$\{\langle pat \wedge (ab \vee pe), 2\rangle, \langle ab \vee pe, 2\rangle, \langle pat \wedge ab, 1\rangle\}$

x_1	u_1	x_1	u_1
$\{pat, ab, pe\}$	5	$\{pat, ab\}$	5
$\{pat, pe\}$	4	$\{pat\}$	0
$\{pe, ab\}$	2	$\{pe\}$	2
$\{ab\}$	2	$\emptyset$	0

Un langage à base de logique et de priorités

Une base de buts priorisés : $B = \langle B_1, \ldots, B_p \rangle$.

$B_1 = \{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,p_1}\}$ buts les plus prioritaires.

$B_p = \{\varphi_{p,1}, \ldots, \varphi_{p,p_p}\}$ buts les moins prioritaires.

- Utilité « Best-out » :
  $u_B(\pi_k) = min\{i | \pi_k$ viole au moins une formule de $B_i\}$.
- Ordre leximin [Benferhat et al. 93].
- Ordre discrimin [Brewka 89].

Un langage à base de logique et de priorités

Une base de buts priorisés : $B = \langle B_1, \ldots, B_p \rangle$.

$B_1 = \{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,p_1}\}$ buts les plus prioritaires.

$B_p = \{\varphi_{p,1}, \ldots, \varphi_{p,p_p}\}$ buts les moins prioritaires.

- Utilité « Best-out » : $u_B(\pi_k) = min\{i | \pi_k$ viole au moins une formule de $B_i\}$.
- Ordre leximin [Benferhat et al. 93].
- Ordre discrimin [Brewka 89].

Un langage à base de logique et de priorités

Une base de buts priorisés : $B = \langle B_1, \ldots, B_p \rangle$.

$B_1 = \{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,p_1}\}$ buts les plus prioritaires.

$B_p = \{\varphi_{p,1}, \ldots, \varphi_{p,p_p}\}$ buts les moins prioritaires.

- Utilité « Best-out » :
  $u_B(\pi_k) = min\{i | \pi_k$ viole au moins une formule de $B_i\}$.
- Ordre leximin [Benferhat et al. 93].
- Ordre discrimin [Brewka 89].

$$\pi_k \succeq \pi'_k \Leftrightarrow \begin{cases} & Card\{i|\pi_k \models \varphi_i \in B_1\} > Card\{i|\pi'_k \models \varphi_i \in B_1\} \\ \text{ou} & \begin{cases} & Card\{i|\pi_k \models \varphi_i \in B_1\} = Card\{i|\pi'_k \models \varphi_i \in B_1\} \\ \text{et} & Card\{i|\pi_k \models \varphi_i \in B_2\} > Card\{i|\pi'_k \models \varphi_i \in B_2\} \end{cases} \\ \text{ou} & \ldots \end{cases}$$

Un langage à base de logique et de priorités

Une base de buts priorisés : $B = \langle B_1, \ldots, B_p \rangle$.
$B_1 = \{\varphi_{1,1}, \ldots, \varphi_{1,p_1}\}$ buts les plus prioritaires.
$B_p = \{\varphi_{p,1}, \ldots, \varphi_{p,p_p}\}$ buts les moins prioritaires.

- Utilité « Best-out » :
  $u_B(\pi_k) = min\{i | \pi_k$ viole au moins une formule de $B_i\}$.
- Ordre leximin [Benferhat et al. 93].
- Ordre discrimin [Brewka 89].

$$\pi_k \succ \pi'_k \Leftrightarrow \begin{array}{l} \min\{i | \exists \varphi \in B_i \text{ t.q. } \pi_k \not\models \varphi \text{ et } \pi'_k \models \varphi\} > \\ \min\{i | \exists \varphi \in B_i \text{ t.q. } \pi'_k \not\models \varphi \text{ et } \pi_k \models \varphi\} \end{array}$$

Disjonctions ordonnés

Une base de buts priorisés sous forme de disjonctions ordonnés [Brewka, Benferhat & Le Berre 02] : $B = \langle \Psi_1, \ldots, \Psi_p \rangle$, avec $\Psi_i = \langle \varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,p_i} \rangle$.
$desu(\pi_k, \Psi_i) = j | \pi_k \models \neg\varphi_{i,1} \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_{i,j-1} \wedge \varphi_{i,j}$.
$\pi_k \succ \pi'_k \Leftrightarrow \langle desu(\pi_k, \Psi_1), \ldots, desu(\pi_k, \Psi_p) \rangle >_{leximin} \langle desu(\pi'_k, \Psi_1), \ldots, desu(\pi'_k, \Psi_p) \rangle$.

Un langage à base de logique et de distances

Au lieu de s'intéresser à la satisfaction des buts, on s'intéresse à la proximité des états aux buts $B = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
Introduction d'une distance : $d : S \times S \longleftarrow \mathbb{R}^+$. (*Exemple : distance de Hamming*).
$\rightsquigarrow$ Agrégation des distances aux buts
$d(\pi_k, B) = F(d(\pi_k, \varphi_1), \ldots, d(\pi_k, \varphi_p))$.
$\pi_k \succ \pi'_k \Leftrightarrow d(\pi_k, B) < d(\pi'_k, B)$.

Autres types de préférences

- Préférences *ceteris paribus* $\rightsquigarrow \gamma : \phi > \psi$ [von Wright 63 ; Hansson 66 ; Doyle & Wellman 91].
- $\Rightarrow$ CP-Nets [Boutilier et al. 99 ; Brafman & Domshlak 02 ; ...].
- Désirs conditionnels [Boutilier 94].

En résumé...

Ce que nous avons vu aujourd'hui :

- Une définition « générique »du problème de partage.
- Les différents paramètres qui peuvent influer sur la nature du problème de partage.
- Quelques applications issues du monde réel.
- Quelques langages de représentation des préférences.

Les questions encore ouvertes...

- Comment combiner de manière satisfaisante efficacité et équité ?
- Comment trouver de bons partages ? (algorithmique...)
- Est-il difficile de trouver de tels partages ? (complexité...)
- Comment prendre en compte de manière correcte des droits inégaux sur la ressource ?

...toutes ces questions pourront éventuellement faire l'objet de prochains séminaires...

Merci de votre attention.